



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

***FACOLTA' DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA  
Corso di laurea in Ingegneria Elettronica***

---

TESI di LAUREA in Comunicazioni Elettriche

***CAPACITA' DI CANALE DI SISTEMI AD ACCESSO  
MULTIPLO***

**Laureando**

Mattia Merluzzi

**Relatore**

Prof. Di Benedetto Maria-Gabriella

*Anno Accademico 2013-2014*

*A mia madre e mio padre*

# INDICE

## Introduzione

### 1. Teoria dell'informazione

- 1.1) Entropia
- 1.2) Codifica di sorgente
- 1.3) Rivelazione di errori
- 1.4) Codifica di canale
- 1.5) Capacità di canale
  - 1.5.1) Canale binario simmetrico
  - 1.5.2) Canale AWGN

### 2. Sistemi ad accesso multiplo

- 2.1) Interferenze multi-utente (MUI)
- 2.2) Accesso multiplo a divisione di tempo (TDMA)
  - 2.2.1) Interferenze multi-utente per sistemi TDMA
  - 2.2.2) Capacità di un sistema TDMA
- 2.3) Accesso multiplo a divisione di frequenza (FDMA)
  - 2.3.1) Capacità di un sistema FDMA
- 2.4) Applicazioni dei sistemi TDMA e FDMA
- 2.5) Accesso multiplo a divisione di codice
  - 2.5.1) Modulazione DS-SS
  - 2.5.2) Interferenze multi-utente per sistemi CDMA
  - 2.5.3) Capacità di un sistema CDMA
  - 2.5.4) Applicazioni dei sistemi CDMA

### 3. Confronti tra le capacità dei diversi sistemi

## Bibliografia

## INTRODUZIONE

In questo lavoro viene presentato un confronto fra tre sistemi d'accesso multiplo ad una risorsa: il TDMA, il FDMA e il CDMA.

In particolare, ciò che interessa studiare, è la capacità complessiva e per utente di tali sistemi al variare di alcuni parametri per stabilire quali siano i principali aspetti che li differenziano, comprendendo quale sia l'utilizzo più adatto di un protocollo rispetto ad un altro.

Al fine di arrivare a queste conclusioni è necessario avere conoscenze di base sulla teoria dell'informazione, argomento del prossimo capitolo.

È doveroso presentare lo schema generale di un canale di trasmissione e le caratteristiche fondamentali dei più diffusi canali, in modo da comprendere quali siano i principali aspetti che influiscono sul calcolo della capacità.

È infine necessario presentare, seppur brevemente, le principali caratteristiche dei diversi sistemi ad accesso multiplo al fine di poter comprendere a fondo la conclusione di questo lavoro.

L'ultima parte sarà quindi dedicata allo studio teorico delle capacità di tali sistemi e ad alcune simulazioni sviluppate nell'ambiente di calcolo MATLAB al fine di rendere chiari i concetti introdotti nella teoria attraverso grafici che mostrano gli andamenti delle capacità per i diversi sistemi.

# CAPITOLO 1

## TEORIA DELL'INFORMAZIONE

La teoria dell'informazione è alla base di tutte le comunicazioni. Questa teoria fornisce tutti gli elementi e le leggi che governano la trasmissione di un messaggio, senza curarsi del significato di questo e ponendo limiti a quantità come l'entropia, la capacità di canale, la probabilità di commettere un errore durante tutta la fase della trasmissione. I due teoremi di Shannon (1948) pongono le basi di questa teoria e sono ancora oggi utilizzati per dimensionare e caratterizzare sistemi di trasmissione di ogni tipo. Prima di procedere alla trattazione degli argomenti di nostro interesse, dobbiamo fornire le basi e domandarci innanzitutto che cos'è l'informazione, soprattutto da un punto di vista matematico.

Nel processo di trasmissione di un messaggio, questo porta un contenuto informativo, il quale permette al destinatario di accrescere la sua conoscenza di un dato in base a ciò che ha ricevuto. Infatti, affinché un messaggio sia "interessante", l'informazione del destinatario a posteriori (dopo la ricezione del messaggio) deve essere maggiore di quella a priori (prima della ricezione del messaggio).

Passiamo alla definizione del contenuto informativo da un punto di vista matematico, ragionando su due aspetti fondamentali che devono caratterizzare l'informazione:

1) L'informazione associata ad un simbolo deve essere inversamente proporzionale alla probabilità che esso si presenti. Infatti è intuitivo pensare che un simbolo meno probabile porti più informazione di un simbolo più probabile.

In formule

Dati due eventi A e B con  $P(A) < P(B)$ ,

$$I(A) > I(B) \quad (1.1)$$

2) Se due simboli A e B sono statisticamente indipendenti, l'informazione portata dal prodotto di questi, deve essere uguale alla somma delle informazioni dei singoli simboli.

In formule ,

$$I(AB) = I(A) + I(B) \quad (1.2)$$

Date queste due proprietà fondamentali, l'informazione può essere definita solo attraverso una funzione, il logaritmo.

Dato un evento A, l'informazione associata ad A è data da

$$I(A) = \log_2 \left( \frac{1}{P(A)} \right) \quad (1.3)$$

La base del logaritmo viene scelta in base all'unità di misura che si intende utilizzare.

In questo caso e nel resto della trattazione verrà utilizzata la base 2, per utilizzare come unità di misura il bit, l'unità di informazione standard.

### 1.1 Entropia

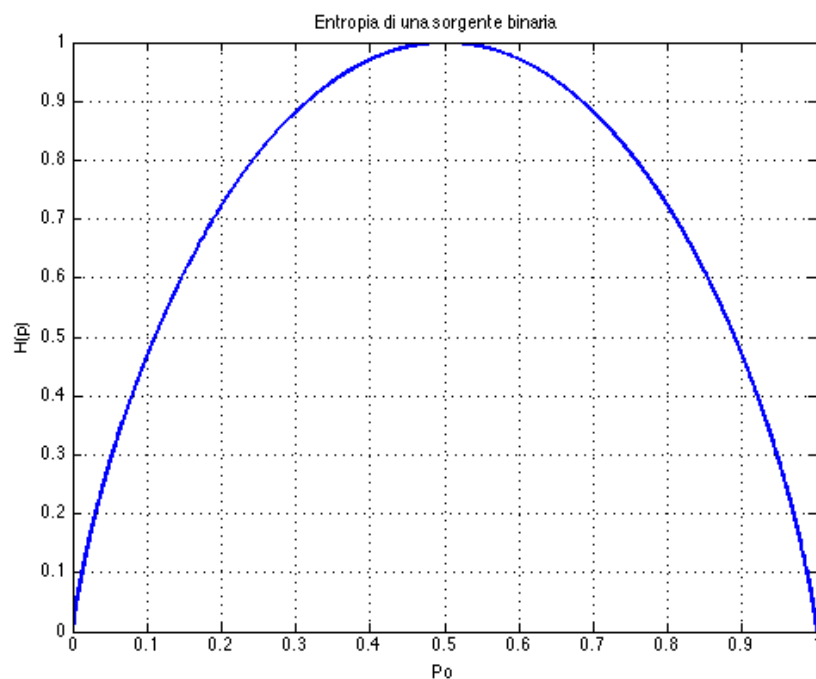
Una quantità molto importante associata alla trasmissione di un messaggio, è l'entropia di sorgente. L'entropia è una misura dell'informazione media di un messaggio (calcolata in bit). Il nome, che rimanda alla grandezza fisica che nelle trattazioni di termodinamica è associata al caos, si presta molto bene perché essa rappresenta una misura dell'incertezza associata ad un messaggio. Da un punto di vista analitico l'entropia si può esprimere come la media

statistica delle informazioni associate ad ogni simbolo di un alfabeto. Consideriamo prima il caso di una variabile aleatoria discreta  $X$ . Se prendiamo tutte le sue possibili realizzazioni  $x_1, \dots, x_M$  con le relative probabilità che ognuna di esse si presenti  $p_1, \dots, p_M$  dove  $p_k = P(X=x_k)$ , l'entropia associata a questo alfabeto è data da

$$H(X) = \sum_{k=1}^M \log_2 \left( \frac{1}{p_k} \right) p_k \quad (1.1.1)$$

Si può verificare facilmente che l'entropia ha un valore massimo: dato un alfabeto di  $M$  simboli infatti si ha, per una sorgente discreta

- 1)  $H(X) \leq \log_2 M$
- 2)  $H(X) = \log_2 M$  se  $p_k = \frac{1}{M} \quad \forall k \in \{1, \dots, M\}$



**Figura 1.1.1** Andamento dell'entropia di una sorgente binaria al variare di  $p_0$  (probabilità che venga emesso il simbolo "0")

Per una sorgente binaria ad esempio, abbiamo  $H(X) \leq \log_2 2 = 1$ . Graficando la funzione  $H(X)$  si ottiene l'andamento in figura 1.1.1.

Possiamo notare la simmetria di questa curva rispetto al valore  $p_0=0.5$  in cui raggiunge il suo massimo. Il risultato è coerente con ciò che abbiamo assunto, ossia che l'entropia è massima per  $p_k=1/M$ , ovvero tutti i simboli sono equiprobabili. In questo particolare caso, dato che stiamo trattando una sorgente binaria, i simboli possibili sono due e se sono equiprobabili  $p = 1-p = 0.5$ . Inoltre, in corrispondenza di questo valore si ha  $H(X) = \log_2 2 = 1$ , che è il valore massimo della funzione nel grafico proposto. Notiamo come per  $p = 1$ , così come per  $p = 0$  vi sia incertezza nulla, risultato intuitivo.

Possiamo ora definire l'entropia condizionata, molto utile nella teoria dell'informazione perché permette di calcolare l'informazione ricevuta da un destinatario in funzione dell'entropia di sorgente e della stessa entropia condizionata. Date due variabili aleatorie discrete  $X$  e  $Y$ , l'entropia condizionata è data dalla seguente espressione:

$$H(Y|X) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n P(y_i, x_k) \log_2 \left( \frac{1}{p(y_i|x_k)} \right) \quad (1.1.2)$$

dove  $P(y_i, x_k) = P(Y=y_i, X=x_k)$  e  $P(y_i|x_k) = P(Y=y_i|X=x_k)$ .

L'entropia condizionata viene utilizzata, come vedremo, per calcolare l'informazione mutua che transita in un canale di trasmissione tra sorgente e destinazione.

Definiamo infine l'entropia differenziale, associata a variabili aleatorie continue, come ad esempio il rumore termico con distribuzione Gaussiana.

Sia  $p_X(x)$  la densità di probabilità (pdf) associata alla variabile aleatoria assolutamente continua  $X$ ; allora l'entropia differenziale  $h(X)$  è data da:

$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \log_2 \left[ \frac{1}{p_X(x)} \right] dx \quad (1.1.3)$$

Per variabili aleatorie discrete abbiamo constatato che la distribuzione che massimizza l'entropia è quella uniforme. È lecito chiedersi quale sia la distribuzione che massimizza l'entropia differenziale e si può dimostrare che questa è proprio la distribuzione Gaussiana, che ha pdf:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.1.4)$$

$\sigma^2$  = Varianza;  $\mu$  = valore medio

Un risultato interessante è il calcolo dell'entropia differenziale associata ad una variabile aleatoria con tale distribuzione:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \log_2 \left[ (2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \left\{ \frac{1}{2} \log_2(2\pi\sigma^2) + \left[ \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \log_2 e \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \log_2(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} (\log_2 e) \underbrace{\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [(x-\mu)^2] p_X(x) dx}_{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma^2) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Questo risultato che verrà utilizzato in seguito, mostra che l'entropia differenziale di una variabile aleatoria gaussiana dipende solo dalla varianza  $\sigma^2$  con una relazione di proporzionalità diretta, risultato intuitivo in quanto la varianza è proprio la misura dell'oscillazione intorno al valore medio, quindi al crescere di essa, cresce anche l'incertezza. Analogamente a quanto visto per variabili aleatorie discrete, si può definire l'entropia differenziale condizionata per due variabili aleatorie assolutamente continue  $X$  e  $Y$  come segue:

$$h(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y|X}(y|x) \log_2 \left( \frac{1}{p_{Y|X}(y|x)} \right) dx dy \quad (1.1.6)$$

## 1.2 Codifica di sorgente

Con i risultati finora presentati si può introdurre il concetto di codifica di sorgente, ovvero il processo attraverso il quale, data una sorgente aleatoria di simboli, si comprimono gli stessi in modo da utilizzare il minor numero possibile di bit a simbolo per trasmettere il messaggio.

Data una sorgente di  $M$  simboli di lunghezza  $n_k$  e probabilità  $p_k$  con  $k=1, \dots, M$  si può esprimere il numero medio di bit per simbolo come segue

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^M p_k n_k \quad (1.2.1)$$

Introduciamo una legge importante che prende il nome di regola del prefisso: data una qualsiasi codifica, affinché essa sia valida, non deve accadere che una parola di codice (codeword) sia prefisso di un'altra parola di codice. La necessità di questa legge sta nel fatto che in fase di decodifica non si devono presentare ambiguità tra due parole di codice diverse. Analiticamente la regola del prefisso è presentata come segue:

$$\sum_{k=1}^M 2^{-n_k} \leq 1 \quad (1.2.2)$$

Presentiamo il seguente teorema che afferma che, data una sorgente discreta, esiste una codifica che rispetti la regola del prefisso tale che

$$H(X) \leq \bar{n} \leq H(X) + 1 \quad (1.2.3)$$

Questo teorema è un risultato importantissimo che fornisce un limite inferiore sulla lunghezza media di una codeword di una qualsiasi codifica. Inoltre ci suggerisce che possiamo raggiungere una lunghezza media che sia minore dell'entropia più 1 bit. Se poniamo l'attenzione sulla 1.2.1, notiamo che essa è una media statistica della lunghezza delle singole parole di un alfabeto che costruiamo in fase di codifica.

Supponiamo di voler codificare 4 simboli con la codifica più semplice

Simbolo	Probabilità	Codeword
$x_1$	0.5	00
$x_2$	0.2	01
$x_3$	0.2	10
$x_4$	0.1	11

L'alfabeto più semplice per un dizionario di 4 parole, è generato da tutte le possibili combinazioni di 2 bit, ovvero 00,10,01,11

Una sequenza di questo tipo ha un numero di bit per simbolo pari a 2 ma se calcoliamo l'entropia di questa sorgente, vedremo che

$$H(X) = 0.5 \log_2(2) + 0.1 \log_2(10) + 0.2 \log_2(5) + 0.2 \log_2(5) = 1.76 \text{ bit}$$

Il teorema 1.2.3 ci suggerisce che possiamo ottenere un numero medio di bit a simbolo che si avvicina, al limite, all'entropia della sorgente. L'idea è quella di associare ai simboli che si presentano con maggiore probabilità, sequenze con il numero di bit minore possibile, mentre a simboli rari, un numero di bit maggiore. In tal modo, il simbolo  $x_1$  che si presenta in media il 50% delle volte, viene codificato con un solo bit, mentre tutti gli altri con 2 o anche 3 bit. Ciò che conta è il numero medio di bit utilizzati che, come si vedrà, viene notevolmente abbassato.



La codifica di Huffman di un simile alfabeto, fornisce il seguente risultato

$x_1$	0.5	0
$x_2$	0.2	11
$x_3$	0.2	100
$x_4$	0.1	101

Con questa codifica si ottiene

$$\bar{n} = (0.5) + 2(0.2) + 3(0.2) + 3(0.1) = 1.8, \text{ molto vicino al valore dell'entropia.}$$

Per chiarezza del lettore, la codifica di Huffman viene costruita ordinando i simboli secondo le probabilità decrescenti, aggregando simboli con probabilità più bassa e sommando le loro probabilità fino ad aggregarli tutti in un albero. Infine si parte dal ramo più in alto e si percorre ogni singolo percorso per arrivare ai simboli da codificare. Si è dimostrato che la codifica di Huffman è la più efficiente in termini di numero medio di bit per simbolo.

Infine, si può estendere la codifica di simboli alla codifica di blocchi di simboli.

Questo tipo di codifica, assegna una codeword ad elementi ottenuti tramite gruppi di simboli. Si formerà in questo modo un nuovo alfabeto  $X' = X^s$ , dove  $s$  rappresenta il numero di simboli che formano un blocco.

Il nuovo alfabeto  $X'$  sarà formato da  $M^s$  simboli e il teorema 1.2.3 si può facilmente estendere a questa nuova configurazione tramite la seguente relazione:

$$H(X') \leq \bar{n}_s < H(X') + 1 \quad (1.2.4)$$

Inoltre, si può facilmente dimostrare che

$$H(X') = sH(X) \quad (1.2.5)$$

Combinando la 1.2.4 e la 1.2.5 si ottiene

$$H(X) \leq \frac{\bar{n}_s}{s} < H(X) + \frac{1}{s} \quad (1.2.6)$$

La 1.2.6 rappresenta il primo teorema di Shannon e suggerisce che aumentando il numero di simboli costituenti un blocco si può ottenere la quantità  $\frac{\bar{n}_s}{s}$  vicina al valore dell'entropia in modo arbitrario.

### 1.3 Rivelazione di errori

Fino ad ora abbiamo considerato sorgenti di simboli supponendo che l'errore in trasmissione fosse nullo, ovvero che un bit emesso dalla sorgente arrivasse uguale a se stesso alla destinazione. Nei sistemi reali affetti da rumore e disturbi di vario genere, questa ipotesi non è valida ed è necessario implementare dei codici detti a "rivelazione di errore" e codici a "correzione di errore". Il modo più semplice e intuitivo di rivelare un errore, è quello di introdurre la cosiddetta ridondanza in trasmissione, ovvero un numero aggiuntivo di bit di "controllo di parità". Questi bit aggiuntivi vengono scelti nel seguente modo: supponiamo di dividere la sequenza ricevuta in sottosequenze di lunghezza  $k$ ; i bit aggiuntivi vengono dunque scelti in modo che il numero di "1" in una determinata sequenza sia pari. Se il destinatario rileva che in una sequenza il numero di "1" è dispari, può concludere che si è verificato un errore in trasmissione e può anche conoscere, attraverso una particolare matrice, il bit che ha subito il flip.

Codici di questo tipo (come ad esempio quelli di Hamming) permettono di rivelare uno o più errori in trasmissione a seconda del numero di bit di ridondanza. Un codice si dice più robusto se rivela in modo più efficiente i possibili errori in trasmissione. È semplice capire che un codice con molti bit di ridondanza è più robusto di un codice con meno bit di ridondanza, tuttavia introduce un numero maggiore di bit per simbolo, perdendo in termini di velocità di trasmissione. A tal proposito introduciamo la seguente quantità:

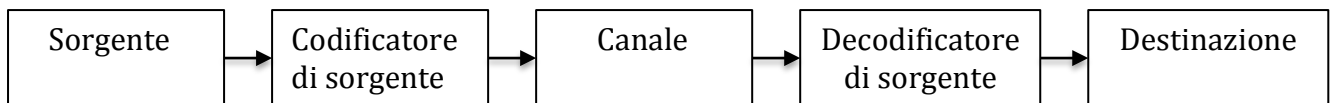
$$R_b = \frac{\text{Numero di bit}}{s} \quad (1.3.1)$$

La velocità di trasmissione  $R_b$  è una misura di efficienza fondamentale della trasmissione. Supponiamo ora di dover trasmettere una sequenza di  $k$  bit: invece di trasmettere esclusivamente i  $k$  bit del messaggio ne trasmettiamo  $n$ , di cui  $(n-k)$  sono i bit di controllo di parità e definiamo la quantità  $\eta = \frac{k}{n}$ . La velocità, che senza la ridondanza è  $R_b$ , viene decrementata e diventa:

$$R'_b = \eta R_b = R_b \frac{k}{n} \quad (1.3.2)$$

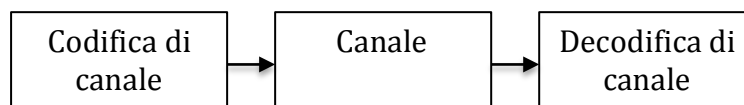
## 1.4 Codifica di canale

Per introdurre il problema della codifica di canale, vediamo come è strutturato un classico sistema di comunicazione, che parte da una sorgente e arriva ad una destinazione.



Abbiamo fino ad ora presentato i blocchi di sorgente e di codificatore di sorgente con le relative grandezze che li caratterizzano. In questa sezione analizzeremo in dettaglio le caratteristiche di un canale di trasmissione.

Il blocco di canale include due ulteriori blocchi: la codifica di canale e la decodifica di canale.



Per canale di trasmissione si intende un qualsiasi mezzo fisico sul quale viaggia un segnale contenente informazione. Il problema di trasmettere l'informazione attraverso un mezzo fisico rappresenta un importantissimo aspetto delle comunicazioni e allo stesso tempo un ostacolo non facile da superare.

I mezzi fisici reali infatti, presentano distorsioni di vario genere e sono sempre affetti da rumore (disturbo). Per trasmettere un messaggio senza che questo arrivi a destinazione modificato, occorre adattare il segnale che viene trasmesso, al mezzo fisico sul quale viaggia. Definiremo l'informazione mutua in un canale di trasmissione tra sorgente e destinazione come:

$$I(X;Y) = \overbrace{H(X)}^{\text{Incertezza a priori}} - \underbrace{H(X|Y)}_{\text{Incertezza a posteriori}} = H(Y) - H(Y|X) \quad (1.4.1)$$

$H(X)$  rappresenta l'incertezza a priori, ovvero l'incertezza sull'emissione di un simbolo tra gli  $M$  di un dato alfabeto, mentre  $H(X|Y)$  rappresenta l'incertezza a posteriori, ovvero l'incertezza sul simbolo emesso, con l'ulteriore informazione che il destinatario ha ricevuto un certo simbolo. Questo significa che la conoscenza di  $Y$ , riduce l'incertezza su  $X$ .

## 1.5 Capacità di canale

Siamo ora in grado di definire la capacità mutua di un canale di trasmissione come segue:

$$C_s = \max_{p_X(x)} I(X;Y) \quad [bit/simbolo] \quad (1.5.1)$$

Se consideriamo la velocità di trasmissione di un simbolo come  $R_s = \frac{Simboli}{s}$ , possiamo esprimere la capacità come segue:

$$C = R_s C_s = R_s \max_{p_X(x)} I(X;Y) \quad [bit/s] \quad (1.5.2)$$

La capacità di un canale è il massimo numero di bit che possono transitare su di esso nell'unità di tempo.

Introduciamo infine il secondo teorema di Shannon, riguardante la codifica di canale. Il teorema afferma quanto segue: data una sorgente di simboli caratterizzata da un'entropia  $H(X)$  e da un canale con capacità  $C$ , esiste una codifica di canale tale che:

- Se  $R < C$  si può trasmettere con una probabilità di errore piccola a piacere.
- Se  $R > C$  non esiste un modo per rendere la probabilità di errore piccola a piacere.

Ciò significa che per un canale con capacità  $C$ , ogni trasmissione può avvenire con velocità  $R$  senza influenzare negativamente la probabilità d'errore.

Concludiamo questa introduzione due tipi di canale ricorrenti nelle trasmissioni: il canale binario simmetrico (BSC) e il canale affetto da rumore additivo gaussiano bianco (AWGN).

### 1.5.1 Canale binario simmetrico (BSC)

Il canale binario simmetrico è caratterizzato da una sorgente binaria che emette quindi il simbolo 0 con probabilità  $p_0$  e 1 con probabilità  $1-p_0$ . Una volta emesso il simbolo, questo può arrivare a destinazione invariato o subire una distorsione e commutare da 0 a 1 o viceversa. Le probabilità che un bit commuti o resti uguale sono mostrate in figura 1.5.1.

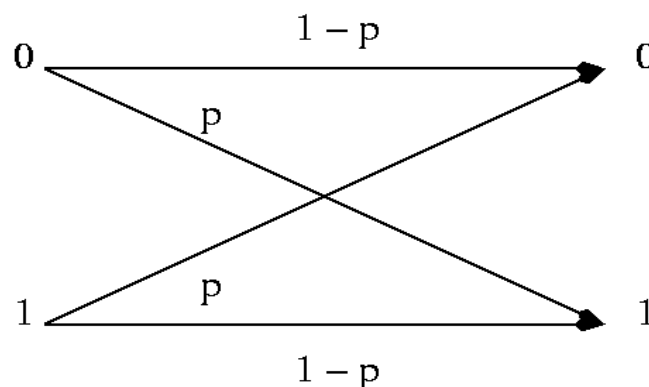


Figura 1.5.1 Schema di un canale binario simmetrico

Abbiamo già presentato l'entropia di una sorgente binaria che indicheremo con

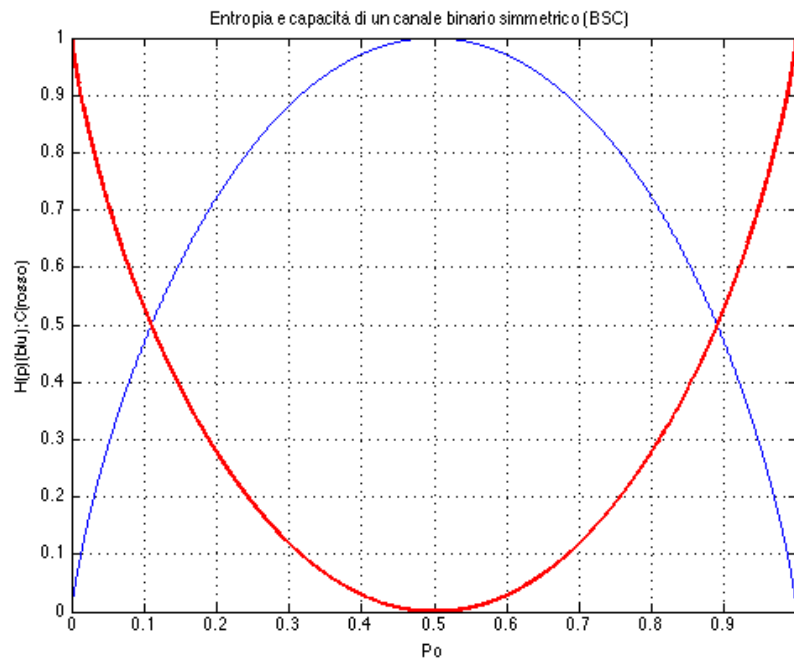
$$H(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \quad (1.5.3)$$

Inoltre si può facilmente verificare che, data X la variabile aleatoria associata ai simboli emessi e Y la variabile aleatoria associata ai simboli ricevuti

$$H(Y|X) = H(p) \quad (1.5.4)$$

Possiamo quindi calcolare la capacità come:

$$C = \max_{p_X(x)} [H(Y) - H(Y|X)] = \max_{p_X(x)} [H(Y) - H(p)] = \max_{p_X(x)} [H(Y)] - H(p) = 1 - H(p)$$



**Figura 1.5.2** Andamento della capacità di un canale binario simmetrico (in rosso) confrontata con quello dell'entropia di una sorgente binaria

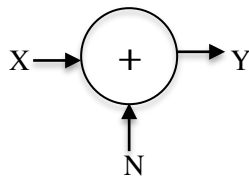
Dal grafico in figura 1.5.2 notiamo che, quando l'incertezza è massima ( $p_0=0.5$ ) la capacità è nulla, risultato intuitivo in quanto si tratta del caso in cui l'incertezza su un simbolo è tale da impedire al ricevitore di ricostruire il messaggio originale.

## 1.5.2 Canale AWGN

Il canale AWGN (Additive White Gaussian Noise) ha un ruolo centrale nelle comunicazioni e stabilendo quali sono i parametri che lo caratterizzano si costituiscono le basi per il calcolo della sua capacità.

A tal proposito supponiamo di voler trasmettere le realizzazioni di una variabile aleatoria continua X.

Il canale in questione si può rappresentare nel modo più semplice possibile come la somma di una variabile “utile” X e una variabile N che rappresenta il rumore nel modo seguente:



Facciamo alcune considerazioni:

1) Rumore gaussiano a media nulla e varianza  $\sigma_n^2$

2)  $\text{Var}(X) = \sigma_x^2$

Ricordando la 1.5.1, abbiamo

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X), \quad \text{dove} \quad H(Y|X) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma_n^2)$$

si ottiene:

$$C_s = \max_{p_X(x)} \left[ H(Y) - \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma_n^2) \right] = \max_{p_X(x)} [H(Y)] - \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma_n^2) \quad (1.5.5)$$

Da ciò si deduce che Y deve essere Gaussiana per massimizzare l'entropia, e dato che  $X = Y - N$ , anche X è gaussiana essendo una combinazione lineare di gaussiane. Dunque, possiamo continuare il calcolo precedente:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \log_2(2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)) - \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \sigma_n^2) = \frac{1}{2} \log_2 \left[ \frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2} \right] = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{P_x}{P_n} \right) = \frac{1}{2} \log_2(1 + SNR) \quad [bit/simbolo] \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Se ora teniamo conto del fatto che i simboli trasmessi sono il frutto del campionamento di un segnale continuo rappresentato dalla realizzazione di X, e che il campionamento deve rispettare la condizione di Nyquist, la sorgente trasmette ad una frequenza  $1/T = 2B$  simboli/s con B la banda del segnale campionato; si ottiene quindi

$$C = B \log_2(1 + SNR) \quad [bit/s] \quad (1.5.7)$$

Questa quantità rappresenta la capacità di un canale AWGN.

Ci si può chiedere quale sia l'andamento di questa al variare dei singoli parametri che la caratterizzano e a tal proposito possiamo esprimere la capacità come

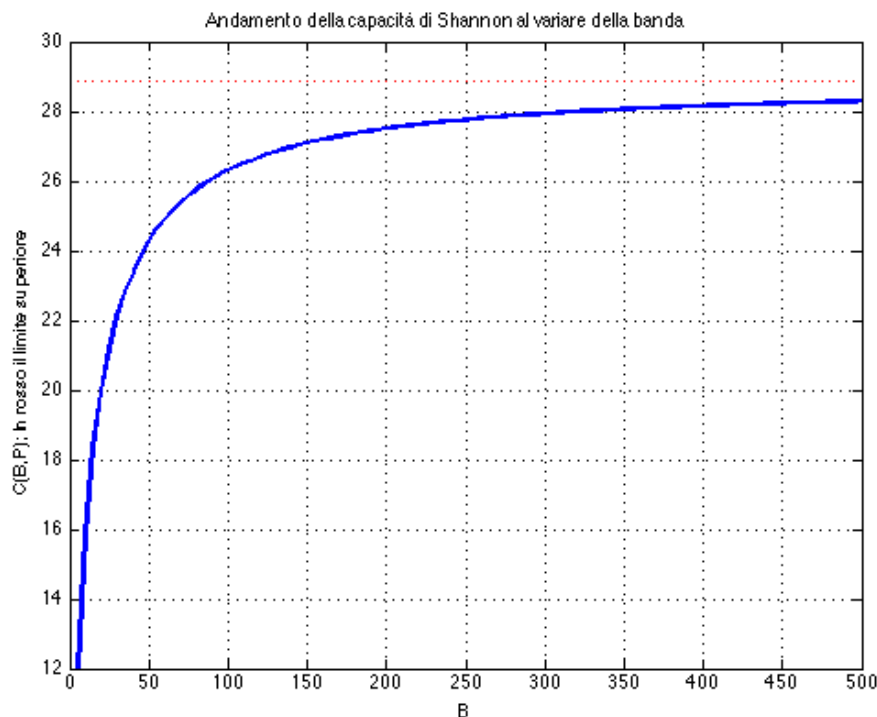
$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P_x}{N_0 B} \right) \quad [bit/s] \quad (1.5.8)$$

Facendo uno studio asintotico di questa funzione, possiamo concludere che per valori di B prossimi allo zero la funzione assume valori molto piccoli, dato che B è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto ai valori molto grandi assunti dal termine logaritmico.

Per valori molto grandi della banda invece, possiamo notare che  $\frac{P_x}{N_0 B} \rightarrow 0$  e ricordando che per  $x \rightarrow 0$  vale  $\ln(1+x) \rightarrow x$ , possiamo concludere che, per  $B \rightarrow \infty$

$$C \approx \frac{B}{\ln 2} \frac{P_X}{N_0 B} = \frac{1}{\ln 2} \frac{P_X}{N_0}$$

Un esempio di andamento della capacità in funzione della banda è mostrato in figura 1.5.3: in blu la capacità, in rosso il suo limite superiore.

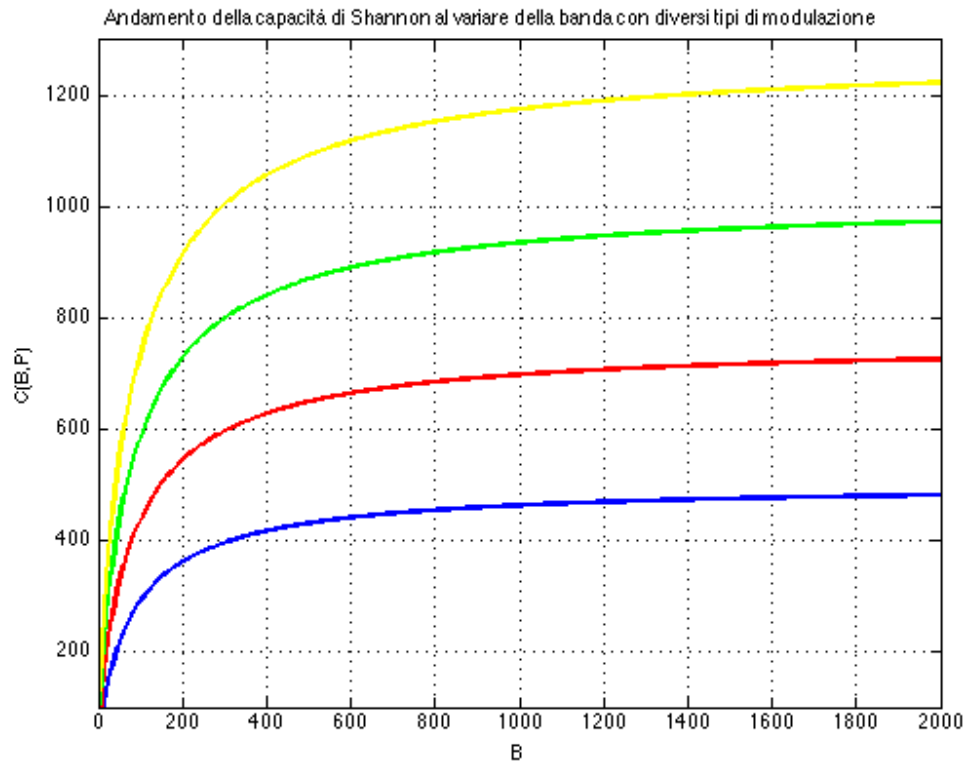


**Figura 1.5.3** Andamento della capacità di canale (in blu) al variare della banda utilizzata. In rosso il limite della capacità

Tale capacità tuttavia è dipendente anche dal tipo di modulazione utilizzata. Se consideriamo modulazioni M-QAM con  $M=2, \dots, N$  possiamo notare che, all'aumentare del numero di livelli, per bande crescenti la capacità può essere anche molto più grande. Ciò potrebbe indurre a pensare che una modulazione con un numero maggiore di livelli sia sempre più favorevole, tuttavia è anche intuitivo il fatto che all'aumentare del numero di livelli diminuisce la distanza tra un livello ed un altro, fenomeno che causa un aumento anche significativo della probabilità di errore.

La figura 1.5.4 chiarisce queste considerazioni. Vediamo gli andamenti della capacità per una modulazione 4-QAM (in blu), 8-QAM (in rosso), 16-QAM (in verde) fino ad una modulazione 32-QAM (in giallo).

A questo punto possiamo affermare che, per bande di frequenza più grandi, è conveniente utilizzare una modulazione con più livelli per ottenere una grande capacità; per bande più piccole, è invece conveniente utilizzare modulazioni con meno livelli, in quanto le capacità ottenute con le diverse modulazioni sono molto vicine tra loro mentre la probabilità di errore è sensibilmente più bassa.



**Figura 1.5.4** Andamento della capacità al variare del tipo di modulazione utilizzata

## CAPITOLO 2

### SISTEMI AD ACCESSO MULTIPLO

Le tecniche di accesso multiplo nascono dalla necessità, di più utenti, di condividere le stesse risorse fisiche per la trasmissione d'informazione.

Al fine di ottenere questo risultato è necessario dividere le risorse in modo da garantire ad ogni utente l'utilizzo di queste evitando allo stesso tempo collisioni e/o interferenze con altri utenti.

Per raggiungere tale obiettivo, sono stati stabiliti diversi protocolli di accesso multiplo, ognuno dei quali presenta caratteristiche diverse e più o meno convenienti per ogni specifico utilizzo. In questa trattazione vengono presentati tre tipi di sistemi: TDMA (Time Division Multiple Access), FDMA (Frequency Division Multiple Access), CDMA (Code Division Multiple Access).

L'accesso ad una risorsa da parte di un utente si può suddividere in due categorie fondamentali: l'accesso statico, in cui ad ogni utente viene assegnato un canale in modo permanente, e l'accesso dinamico, in cui un canale viene assegnato ad un utente solo nel caso questo debba trasmettere.

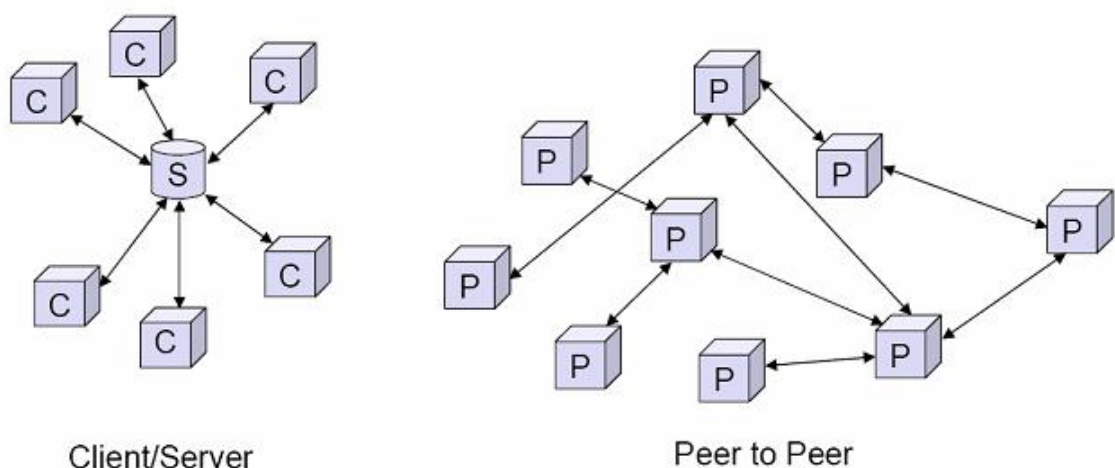
È evidente e intuitivo il fatto che accessi di tipo statico comportano uno spreco di risorse non trascurabile in molti casi.

Non di rado, è necessario che l'accesso venga gestito da un'unità di controllo che coordini i diversi utenti e ne massimizzi la cooperazione per evitare fenomeni indesiderati come interferenze tra gli stessi.

In merito a questo, le reti ad accesso multiplo si possono suddividere in reti centralizzate e reti decentralizzate: le prime presentano un'unità di controllo che coordina e gestisce tutti gli accessi; nelle reti decentralizzate invece, non esiste una gerarchia precisa tra i singoli utenti.

Le reti decentralizzate sono più difficili da gestire in quanto tutti gli utenti comunicano tra di loro (peer-to-peer) e devono garantirsi a vicenda le condizioni per non generare interferenze multi-utente (MUI).

Nei paragrafi successivi saranno presentate tecniche di accesso che necessitano di centralizzazione e tecniche che invece possono operare in autonomia senza una particolare gerarchia.



**Figura 2.1** Esempio di una rete centralizzata (a sinistra) e di una rete decentralizzata (a destra) [Microsoft,2008]



## 2.1 Interferenze multi-utente (MUI)

Per interferenza multi-utente, si intende quel fenomeno per il quale più utenti che accedono ad una stessa risorsa si disturbano in modo reciproco, provocando talvolta corruzioni di dati irreversibili se non attraverso la ritrasmissione del pacchetto, tecnica a dir poco inefficiente. Vedremo che per evitare la MUI esistono tecniche diverse per ogni tipo di accesso.

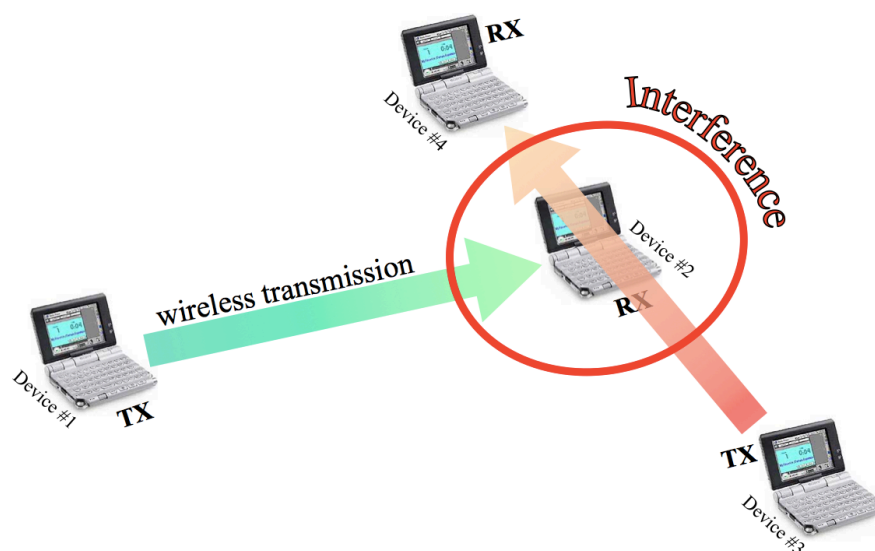


Figura 2.1.1 Esempio di interferenza multi-utente [Di Benedetto, corso di Sistemi d'accesso, Sapienza Università di Roma]

Vedremo che la MUI si presenta il più delle volte come un rumore additivo che influisce negativamente sul rapporto segnale rumore al ricevitore.

## 2.2 Accesso multiplo a divisione di tempo (TDMA)

I sistemi ad accesso multiplo a divisione di tempo, sono necessariamente centralizzati e la risorsa è divisa tra i vari utenti nel dominio del tempo in diversi intervalli.

L'unità centrale trasmette periodicamente un segnale di riferimento (reference burst) che definisce un intervallo di tempo detto trama (frame) in cui avverrà la trasmissione di tutti gli utenti che ne avranno bisogno e che provvede alla sincronizzazione di questi ultimi, fondamentale in questo protocollo.

Al fine di permettere questo, la trama viene divisa in tanti intervalli di tempo (time slot) quanti sono gli utenti ammessi nel sistema.

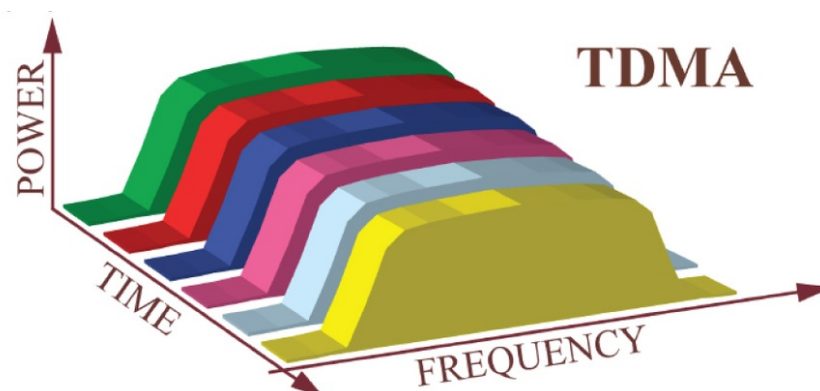


Figura 2.2.1 Sistema a divisione di tempo [Scientific Reports, Article 2211, 2013]

Ad ogni utente viene quindi assegnato uno slot della trama, che non è necessariamente lo stesso per due trame differenti (ad esempio un utente può trasmettere nello slot 1 nella prima trama e nello slot 5 nella seconda trama). A questo punto ogni utente ha un tempo in cui può accedere alla risorsa e trasmettere o ricevere informazione utilizzando tutta la banda a disposizione in quel determinato tipo di trasmissione, come in figura 2.2.1.

Abbiamo accennato al fatto che la sincronizzazione degli utenti in questo protocollo è fondamentale, infatti fenomeni come i diversi ritardi di propagazione dei segnali da/verso i singoli utenti, possono generare collisioni indesiderate tra pacchetti. Per ridurre la probabilità di collisione tra due o più trasmissioni, il tempo di ogni slot viene dilatato di un ulteriore intervallo (tempo di guardia), che permette di evitare collisioni nel caso si verificano eventi di desincronizzazione.

Al fine di rendere la sincronizzazione il più possibile precisa, all'inizio di ogni trasmissione da parte di un utente, questo invia un segnale (preambolo) contenente informazioni sulla fase della portante utilizzata.

Il bit rate di un sistema TDMA è uguale per tutti gli utenti ed è stabilito dalla banda di frequenze utilizzata nella trasmissione, dunque, se un utente necessita di trasmettere un pacchetto dati che supera il tempo stabilito per ogni slot, il sistema gli assegnerà più slot di una stessa trama in modo da garantire la trasmissione dell'intero pacchetto. Quest'ultima osservazione chiarisce il principio secondo cui ad un utente non viene necessariamente assegnato sempre lo stesso slot per trame diverse.

### 2.2.1 Interferenze multi-utente per sistemi TDMA

Nei sistemi TDMA l'interferenza multi-utente si presenta sotto forma di collisione di pacchetti nel caso in cui la trasmissione di un utente, a causa di ritardi di propagazione o desincronizzazioni, non avvenga nello slot assegnato a quest'ultimo. Un'interferenza di questo tipo è distruttiva e comporta la perdita dei dati trasmessi e la necessità di una ritrasmissione. Per questo motivo i sistemi TDMA devono essere dimensionati in modo opportuno e soprattutto non possono ammettere un numero di utenti incompatibile con la divisione della trama in slot comprendenti i necessari tempi di guardia.

Con la giusta sincronizzazione tra utenti e unità centrale, e con gli intervalli di guardia dimensionati in modo accurato, possiamo affermare che la probabilità di interferenza multi-utente diviene praticamente trascurabile.

È intuitivo affermare che al crescere della lunghezza dei tempi di guardia diminuisce la probabilità di collisione, tuttavia ciò determina una perdita di efficienza in termini di velocità di trasmissione. Inoltre bisogna notare che la sincronizzazione attraverso il reference burst e i segnali di preambolo avviene trasmettendo, oltre che l'informazione utile, un certo numero di bit in più, il che porta ad una riduzione del numero di bit trasmissibili in una trama. A tal proposito si definisce l'efficienza di trama come  $\vartheta = \frac{N_u}{N_t}$ , dove  $N_u$  è il numero di bit utili e  $N_t$  il numero di bit totali.

### 2.2.2 Capacità di un sistema TDMA

Abbiamo stabilito che in un sistema TDMA, ogni utente ha accesso a tutte le frequenze disponibili per quella comunicazione in un tempo di slot stabilito da un'unità centrale.

Immaginiamo di avere  $N$  utenti in un tale sistema e che per la trasmissione in esame si abbia a disposizione una banda  $B$ .

Dall'equazione di Shannon possiamo dunque calcolare la capacità complessiva del canale (supposto AWGN), come

$$C = B \log_2(1 + SNR) = B \log_2\left(1 + \frac{P}{P_n}\right) = B \log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right) \quad [bit/s] \quad (2.2.1)$$

dove abbiamo indicato con B la banda a disposizione, con P la potenza in trasmissione e con  $N_0$  l'ampiezza dello spettro di densità di potenza di rumore bianco. La potenza complessiva di rumore è dunque data da  $P_n = N_0 B$ .

Dobbiamo ora considerare che ogni utente trasmette per  $1/N$  del tempo totale di una trama con una potenza complessiva pari a P (che è tutta la potenza a disposizione). La capacità per ogni singolo utente diviene dunque

$$C_u = \frac{B}{N} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{P_n} \right) = \frac{B}{N} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right) = \frac{C}{N} \text{ [bit/s]} \quad (2.2.2)$$

### 2.3 Accesso multiplo a divisione di frequenza (FDMA)

I sistemi ad accesso multiplo a divisione di frequenza, a differenza dei sistemi a divisione di tempo, non necessitano di essere centralizzati. Questo protocollo infatti, si basa sulla divisione della banda complessiva in tante sottobande quanti sono gli utenti ammessi nel sistema e assegna ad ogni utente una banda di frequenze diversa.

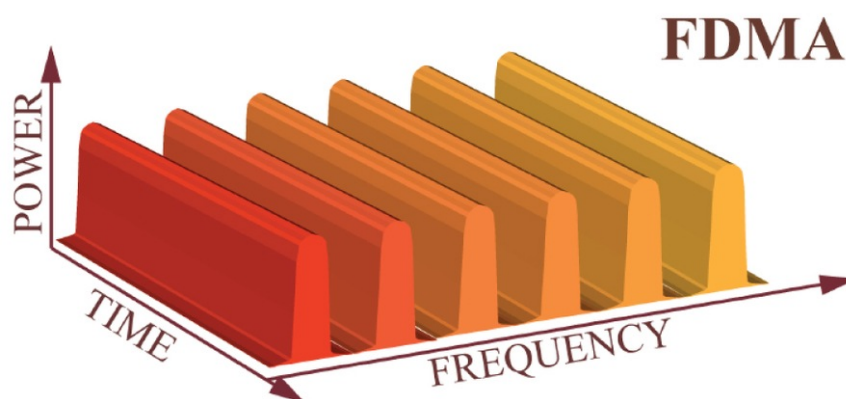


Figura 2.3.1 Sistema a divisione di frequenza [Scientific Reports, Article 2211, 2013]

In tal modo, le possibili collisioni dovute a ritardi di propagazione come nel TDMA non sono possibili.

Tuttavia ci sono diversi aspetti negativi di questi sistemi che bisogna mettere in luce, e per fare ciò è necessario capire quali sono le modalità utilizzate per dividere la banda.

Questa operazione infatti, necessita di filtri passa-banda molto sofisticati e costosi che rendono questa tecnica non privilegiata nella divisione delle risorse.

Inoltre i sistemi FDMA sono molto sensibili alle non linearità dei canali di trasmissione.

Per evitare che trasmissioni su sottobande diverse si sovrappongano generando MUI, analogamente al caso TDMA, vengono introdotte delle bande di guardia.

Come già detto però, essendo la risorsa divisa nel dominio della frequenza, non è necessario alcun tipo di sincronizzazione e per questo motivo la tecnica FDMA può essere utilizzata nelle reti decentralizzate.

#### 2.3.1 Capacità di un sistema FDMA

In questo paragrafo analizziamo la capacità di canale complessiva e la capacità per utente di un sistema a divisione di frequenza.

È immediato affermare che la capacità complessiva di un tale sistema è tutta quella a disposizione nella banda di frequenze che stiamo utilizzando, dunque la stessa del caso TDMA (relazione 2.2.1).

Ora consideriamo la capacità per ogni utente di un sistema di questo tipo, valutando come variano i diversi parametri. Detto  $N$  il numero di utenti, i parametri disponibili per ogni singolo utente saranno una sottobanda

$$B_u = \frac{B}{N} \quad (2.3.1)$$

e una potenza

$$P_u = \frac{P}{N} \quad (2.3.2)$$

Il canale di ogni utente è poi affetto da un rumore con spettro bianco di ampiezza  $N_0$ , con potenza

$$P_{n_u} = \frac{N_0 B}{N} \quad (2.3.3)$$

Con questi parametri possiamo esprimere la capacità di canale per ogni utente

$$C_u = \frac{B}{N} \log_2 \left( 1 + \frac{P/N}{N_0 B/N} \right) = \frac{B}{N} \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right) = \frac{C}{N} \quad [bit/s] \quad (2.3.4)$$

che è identica al caso di un sistema a divisione di tempo (2.2.2).

## 2.4 Applicazione dei sistemi TDMA e FDMA

Presentiamo brevemente una delle principali applicazioni dei sistemi finora descritti. Esistono ovviamente sistemi che utilizzano un protocollo piuttosto che un altro separatamente, tuttavia si può pensare di utilizzare contemporaneamente i due sistemi per diverse ragioni.

Il caso di uno standard che utilizza sia una divisione nel dominio del tempo che una divisione nel dominio della frequenza è il GSM900.

Il GSM è lo standard di seconda generazione utilizzato nella telefonia cellulare. Esso ha sostituito lo standard TACS che utilizzava un sistema a divisione di frequenza per l'accesso. Il GSM utilizza due bande di 25MHz ognuna: la prima, nel range 890-915 MHz (utilizzata per l'uplink) e la seconda, nel range 935-960 MHz (utilizzata per il downlink).

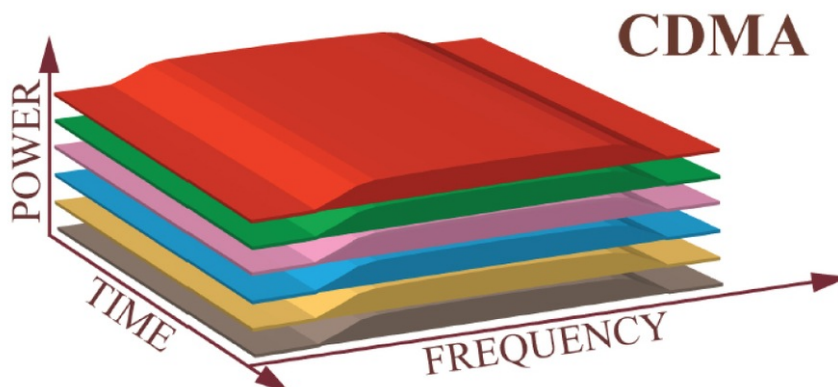
Queste due bande sono divise in sottobande di 200 KHz in modo da ottenere 125 diverse portanti su cui trasmettere. Questa prima divisione rappresenta la parte di FDMA.

Ognuna di queste sottobande viene poi divisa nel tempo (TDMA) in trame di 8 slot ciascuna. In questo modo, il GSM900 permette di ottenere 992 canali diversi (124x8) in quanto una delle 125 portanti viene utilizzata per generare due bande di guardia di 100 KHz ciascuna all'inizio e alla fine della banda complessiva.

## 2.5 Accesso multiplo a divisione di codice (CDMA)

Abbiamo fino ad ora trattato sistemi in cui la risorsa è divisa nel tempo e ogni utente può utilizzare tutta la banda (TDMA) e sistemi in cui la risorsa è divisa in frequenza e ogni utente trasmette per tutto il tempo (FDMA).

Vediamo infine un tipo di sistema in cui ogni utente può trasmettere per tutto il tempo utilizzando tutte le frequenze: è il caso dei sistemi CDMA.



**Figura 2.5.1** Sistema a divisione di codice [Scientific Reports, Article 2211, 2013]

In questo protocollo infatti, l'ortogonalità tra gli utenti è garantita, nei limiti possibili, dall'assegnazione di codici diversi per ognuno e il meno possibile correlati tra loro.

Ogni utente dunque, trasmette il pacchetto dati originale codificato attraverso un codice conosciuto dal ricevitore, il quale può facilmente decodificare il messaggio.

Per ottenere questo risultato, i sistemi CDMA si basano su una modulazione a spettro espanso (spread spectrum), ovvero un processo con il quale si cerca di coprire la maggior parte delle frequenze utilizzate nella trasmissione.

Le modulazioni a spettro espanso presentano diversi vantaggi e vengono utilizzate in moltissime applicazioni.

Il principale vantaggio è l'immunità alle interferenze a banda stretta. Inoltre, l'espansione dello spettro permette di incrementare notevolmente la potenza in trasmissione, diminuendo significativamente l'impatto delle attenuazioni dovute ai cammini multipli del segnale.

Esistono diverse tecniche di modulazione a spettro espanso: Direct Sequence (DS-SS), Frequency hopping (FH-SS), Time Hopping (TH-SS).

La tecnica DS-SS utilizza un metodo diretto di espansione della banda, associando ad ogni bit un numero di bit maggiore (proporzionale all'allargamento della banda che si vuole ottenere), da trasmettere nello stesso intervallo di tempo. Le sequenze associate ad ogni bit sono dette "chipping codes".

In tal modo la velocità di trasmissione aumenta rispetto al normale Bit Rate, utilizzando così una banda più ampia.

La tecnica FH-SS è basata sul cosiddetto salto di frequenze, ovvero la larghezza di banda per ogni trasmissione rimane la stessa mentre la portante viene modificata in modo da coprire, in media, tutta la banda a disposizione.

Infine, nella tecnica TH-SS il segnale viene trasmesso a intervalli di tempo diversi.

Abbiamo accennato al fatto che, per un sistema CDMA occorre stabilire dei codici da assegnare ad ogni utente in modo da ottenere l'ortogonalità tra ognuno di essi.

Una classe di codici utilizzati per questo scopo sono quelli ottenuti dalle matrici di Walsh e Hadamard, matrici quadrate con un numero di righe e colonne pari a una potenza di 2.

Gli elementi di queste, che possono essere 1 e -1, sono scelti in modo che il prodotto scalare tra una riga e un'altra qualsiasi sia nullo, così da rispettare la specifica di ortogonalità.

### 2.5.1 Modulazione DS-SS

È utile soffermarsi sullo studio e la comprensione della modulazione Direct Sequence. Come già è stato accennato, questo tipo di espansione dello spettro si basa sulla trasmissione di

codici detti “chipping codes” associati ad ogni singolo bit; in tal modo la banda utilizzata verrà espansa in modo proporzionale al numero di bit che compongono il chipping code.

Ad esempio se consideriamo un segnale originario con banda 1MHz e un numero di chip pari a 10 per codificare ogni bit, il segnale modulato utilizzerà una banda di 10MHz.

Vi è poi, grazie al fatto che solo trasmettitore e ricevitore conoscono il codice di spreading, la possibilità di comunicare senza essere intercettati, vantaggio che ha reso questo tipo di modulazione privilegiata anche nelle applicazioni militari.

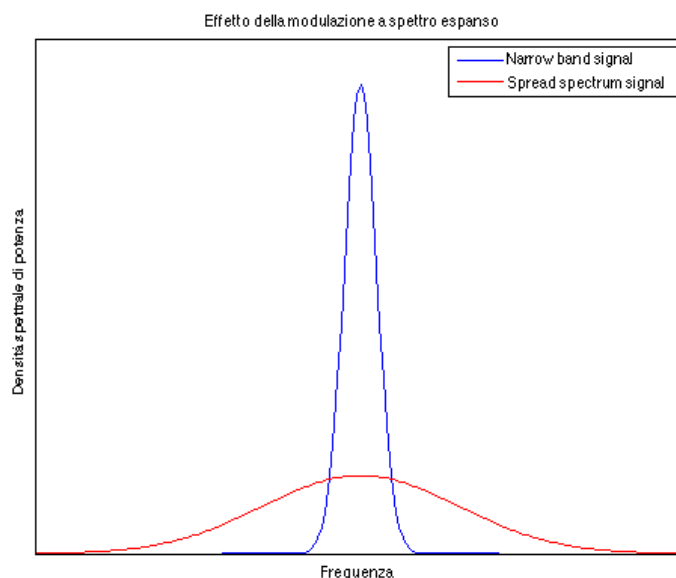


Figura 2.5.2 Effetto della modulazione a spettro espanso

## 2.5.2 Interferenze multi-utente per sistemi CDMA

Occorre precisare che, per quanto si cerchi di ottenere codici con bassa correlazione, al crescere del numero di utenti è più probabile che si verifichino eventi di parziale correlazione tra due o più codici.

Possiamo dunque affermare che, mentre nei sistemi TDMA e FDMA la MUI poteva essere generata solo da collisioni dovute a ritardi di propagazione o da bande di guardia non accuratamente dimensionate, nei sistemi CDMA tale fenomeno si può verificare anche in presenza di sincronizzazione.

Si vedrà che il termine di interferenza multi-utente, peggiora le prestazioni di un sistema di questo tipo a causa della presenza di un ulteriore termine presente nel calcolo del SNR.

A tal proposito possiamo pensare ad un'altra distinzione nei sistemi CDMA: i sistemi in cui gli utenti sono cooperativi (sono perfettamente sincronizzati in modo da evitare correlazioni) e sistemi in cui gli utenti non sono cooperativi (si possono verificare eventi di parziale correlazione).

In particolare, se supponiamo che N utenti non cooperativi trasmettano allo stesso tempo e sulla stessa banda di frequenze, e che in un dato istante ci interessiamo alla trasmissione di un particolare utente, gli altri N-1 sono considerati elementi di disturbo per la trasmissione. Nei sistemi precedentemente studiati infatti, non esisteva questa problematica di trasmissione simultanea sulla stessa banda.

Possiamo quindi pensare ad un rumore additivo composto di due termini:

$$N_{tot} = N_n + N_{mui} \quad (2.5.1)$$

dove con  $N_n$  si intende il classico rumore presente in ogni canale (AWGN) e con  $N_{mui}$  si intende un termine di rumore introdotto dagli  $N-1$  utenti visti come elementi di disturbo. Prima di procedere allo studio di questi due disturbi e alla definizione di capacità di un sistema a divisione di codice, introduciamo un ulteriore problema che affligge questo tipo di sistema, quello del “near-far”.

Questo inconveniente nasce dal fatto che, come è intuitivo, in un sistema centralizzato non tutti gli utenti si trovano alla stessa distanza dall’unità di controllo.

Tale fenomeno implica che se tutti gli utenti trasmettono con la stessa potenza, all’unità centrale arrivano segnali più forti (degli utenti più vicini) e segnali più deboli (utenti più lontani), a causa di un’ovvia differenza di attenuazioni di percorso subite dal segnale trasmesso. In tal modo, utenti più lontani subiscono interferenze più grandi dagli utenti più vicini. Una tecnica risolutiva e molto semplice da realizzare in reti centralizzate è quella del controllo di potenza: l’unità centrale, in funzione di diversi parametri come la distanza di ogni utente, stabilisce e comunica a tutti questi, la potenza con cui trasmettere in modo che al ricevitore arrivino segnali di uguale potenza, evitando il fenomeno sopra descritto.

Vediamo ora come stimare il termine di interferenza multi-utente, come potenza aggiuntiva alla potenza di rumore.

Per fare questi calcoli si utilizza un’approssimazione valida in quasi tutti i casi di interesse, l’approssimazione alla Gaussiana Standard (SGA), che afferma di poter trattare il rumore aggiuntivo dovuto alle interferenze multi-utente come un rumore con distribuzione normale.

I limiti di validità di questa approssimazione sono dati dal teorema centrale del limite, di cui si fornisce un semplice, seppur chiaro enunciato.

### **Teorema centrale del limite**

Data una successione di variabili aleatorie  $X_i$ , con  $i=1,..,N$  indipendenti e identicamente distribuite con valore atteso  $E[X_i]=0$  e varianza  $\sigma_x^2$  finita, e definita la variabile aleatoria

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{\sqrt{N}}$$

La densità di probabilità di  $Y$ , per  $N$  che tende ad infinito diviene:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}$$

Analizzando il teorema centrale del limite possiamo affermare che la SGA perde di validità per reti scarsamente popolate.

Per sistemi che non soddisfano le condizioni necessarie a questa approssimazione, si possono utilizzare metodi diversi basati sul calcolo della funzione caratteristica.

Per semplicità della trattazione supponiamo di trovarci in situazioni in cui il numero di utenti sia abbastanza elevato da permettere di utilizzare la SGA, approssimazione non lontana dalla realtà.

Possiamo dunque affermare che la potenza di rumore totale è data da

$$P_{ntot} = \sigma_n^2 + \sigma_{mui}^2 \quad (2.5.2)$$

dove  $\sigma_n^2$  e  $\sigma_{mui}^2$  sono le varianze delle variabili aleatorie associate ai due rumori a media nulla.

### **2.5.3 Capacità di un sistema CDMA**

Analizziamo ora la capacità di un sistema a divisione di codice. Per i sistemi TDMA e FDMA abbiamo ottenuto una capacità per utente pari a  $1/N$  della capacità totale.

Nei sistemi CDMA invece, dove ogni utente utilizza tutto il tempo e tutta la banda, la capacità per utente, supponendo che gli utenti non siano perfettamente sincronizzati a livello di codici e che quindi possano perdere di ortogonalità, è data da:

$$C_u = B \log_2(1 + SNR_{tot}) \quad [bit/s]$$

dove con  $SNR_{tot}$  si è indicato il rapporto segnale rumore dovuto a due contributi: il rumore termico e il rumore generato dall'interferenza degli  $N-1$  utenti che disturbano un dato utente. È doveroso calcolare  $SNR_{tot}$  in modo da poter confrontare la capacità di questo sistema con le capacità già calcolate per gli altri due sistemi.

Dalla relazione

$$\frac{1}{SNR_{tot}} = \frac{1}{SNR_n} + \frac{1}{SNR_{mui}}$$

otteniamo

$$SNR_{tot} = \frac{SNR_n SNR_{mui}}{SNR_n + SNR_{mui}} \quad (2.5.3)$$

dove

$$SNR_n = \frac{P_u}{N_0 B} \quad (2.5.4)$$

e  $SNR_{mui}$  è il contributo dato dal rumore di interferenza multi-utente.

Per questo calcolo è utile presentare due diverse casistiche: la prima rappresenta in generale la capacità complessiva e per utente di un sistema CDMA, la seconda introduce un termine di interferenza con la modulazione a spettro espanso Direct Sequence.

Nel primo caso, la potenza interferente è rappresentata dagli  $N-1$  utenti di cui non interessa la trasmissione. Il  $SNR_{mui}$ , utilizzando le stesse notazioni dei casi precedentemente studiati, sarà dato da

$$SNR_{mui} = \frac{P_u}{(N-1)P_u} = \frac{1}{N-1} \quad (2.5.5)$$

Si ottiene quindi un'espressione per il rapporto segnale rumore totale data da:

$$SNR_{tot} = \frac{P_u}{N_0 B + (N-1)P_u} \quad (2.5.6)$$

La capacità per utente di un tale sistema sarà quindi

$$C_u = B \log_2 \left( 1 + \frac{P_u}{N_0 B + (N-1)P_u} \right) \quad (2.5.7)$$

La capacità complessiva

$$C = N B \log_2 \left( 1 + \frac{P_u}{N_0 B + (N-1)P_u} \right) \quad (2.5.8)$$

Tale espressione è ben diversa da quella dei casi TDMA e FDMA e verrà utilizzata in seguito nelle simulazioni per mostrare i diversi comportamenti di questo importante parametro.



Analizziamo ora un sistema CDMA con modulazione Direct Sequence spread spectrum. Per un sistema DS-CDMA si ottiene un rapporto segnale rumore per l'utente  $i$ -esimo generato dall'interferenza multi-utente pari a

$$SNR_{mui}(i) = \frac{3N_{DS}P_u(i)}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N P_u(k)} \quad (2.5.9)$$

con  $k=1, \dots, N$ . Con  $N_{DS}$  si è indicato il numero di chip utilizzati per l'espansione dello spettro e con  $P_u$  la potenza associata alla trasmissione del singolo utente (data dalla 2.3.2). Nel caso si utilizzi un sistema di controllo di potenza, bisogna notare che la potenza ricevuta da ogni utente è la stessa per ognuno di essi; ciò comporta una semplificazione della formula precedente che diviene

$$SNR_{mui} = \frac{3N_{DS}}{N-1} \quad (2.5.10)$$

Il  $SNR_{tot}$  si può esprimere dunque come

$$SNR_{tot} = \frac{3N_{DS}P_u}{3N_{DS}N_0B + P_u(N-1)} \quad (2.5.11)$$

Si può esprimere la capacità per utente di un sistema CDMA con modulazione DS-SS, utenti non cooperativi e controllo di potenza come segue:

$$C_u = B \log_2(1 + SNR_{tot}) = B \log_2 \left( 1 + \frac{3N_{DS}P_u}{3N_{DS}N_0B + P_u(N-1)} \right) \quad [bit/s] \quad (2.5.12)$$

La capacità complessiva di canale di un tale sistema è quindi data da

$$C = NC_u = NB \log_2 \left( 1 + \frac{3N_{DS}P_u}{3N_{DS}N_0B + P_u(N-1)} \right) \quad [bit/s] \quad (2.5.13)$$

Vediamo infine il caso di un sistema CDMA cooperativo, che rappresenta il vero caso di interesse per confrontare un sistema CDMA e un sistema TDMA/FDMA dal punto di vista della capacità: un tale sistema presenta una capacità di canale complessiva per utente pari a

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0B} \right) \quad [bit/s]$$

identica al caso FDMA e TDMA (2.2.1).

La capacità per ogni utente che trasmette con potenza  $P_u = \frac{P}{N}$  vale

$$C_u = B \log_2 \left( 1 + \frac{P/N}{N_0B} \right) \quad [bit/s] \quad (2.5.14)$$

che, come si nota, è ancora diversa dalla capacità per utente ottenuta nel caso di accesso multiplo a divisione di tempo e di frequenza.

Questo risultato è molto importante e nei prossimi paragrafi verranno chiarite le principali conseguenze e i motivi per cui i sistemi CDMA sono ormai utilizzati nella maggior parte delle applicazioni.

#### **2.5.4 Applicazioni dei sistemi CDMA**

Anche per i sistemi CDMA è interessante presentare, anche se brevemente, alcune applicazioni. In particolare, il sistema CDMA è stato il trampolino di lancio per lo standard di telefonia cellulare di terza generazione (UMTS) che rappresenta la risposta europea allo standard IS-95 (Qualcomm), il primo sistema ad aver utilizzato un protocollo a divisione di codice attraverso l'algoritmo di Viterbi.

Lo standard UMTS utilizza proprio una tecnologia a divisione di codice e ha permesso un'evoluzione del sistema di telefonia, introducendo la possibilità di scambiare dati a pacchetto grazie all'aumento della capacità rispetto ai precedenti sistemi.

Un sistema di questo tipo permette inoltre di gestire la risorsa in modo più flessibile, come sarà chiarito in seguito, assegnando agli utenti una frazione di capacità il più possibile in linea con la trasmissione che devono effettuare.

Un'altra interessante e molto frequente applicazione dei sistemi CDMA è quella delle reti LAN (Local Area Network).

Tali reti comprendono tutte quelle comunicazioni che avvengono in aree geografiche ristrette (reti Wifi di abitazioni, uffici, sistemi di comunicazione wireless come il Bluetooth).

Una rete Wifi di questo tipo viene realizzata attraverso l'utilizzo di due protocolli, il TDMA e il CDMA.

Il primo viene utilizzato per l'accesso alla risorsa, il secondo invece utilizza la tecnica di modulazione a spettro espanso al fine di aumentare la potenza in trasmissione e allargare la copertura della rete.

## CAPITOLO 3

### CONFRONTI TRA LE CAPACITA' DEI DIVERSI SISTEMI

Avendo descritto i tre sistemi ad accesso multiplo, in particolare per quanto riguarda le capacità, possiamo ora confrontare queste al variare dei parametri che caratterizzano questi sistemi.

Si è infatti visto che le capacità per utente dei diversi protocolli non hanno la stessa dipendenza dal numero di utenti. Questa distinzione nasce in realtà dal confronto tra sistemi TDMA/FDMA e sistemi CDMA, essendo identiche le espressioni delle capacità per i primi due sistemi.

A tal proposito, come prima analisi, si è pensato di simulare l'andamento della capacità per utente al variare del numero di utenti ammessi nel sistema e di confrontare il risultato per sistemi FDMA e sistemi CDMA.

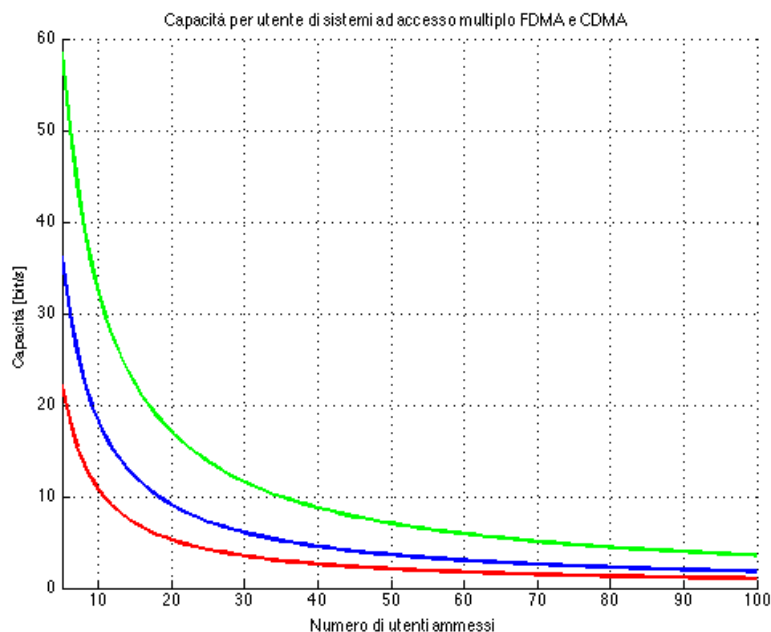
In particolare, la simulazione è stata svolta con due diversi gruppi di parametri.

Per la prima simulazione si è considerato un sistema di trasmissione che operasse con una banda di 100Hz, una potenza complessiva di  $10^{-18}$ W, uno spettro di densità di potenza di rumore bianco di ampiezza  $4 \cdot 10^{-21}$ W/Hz e un numero di utenti ammessi che varia in modo crescente da 1 a 100 con passo unitario.

Nel grafico proposto in figura 3.1.1 di può osservare la capacità per utente di un sistema TDMA/FDMA (in blu), la capacità per utente di un sistema CDMA con utenti cooperativi (in verde) e la capacità per utente di un sistema CDMA con utenti non cooperativi (in rosso). Come si nota, la capacità per utente di un sistema CDMA con utenti cooperativi ha una dipendenza dal numero di utenti più favorevole rispetto al sistema TDMA/FDMA.

Questo risultato era già ben chiaro dalla teoria in quanto nei sistemi FDMA gli utenti devono dividersi la banda, potendo quindi utilizzare solo una frazione di quella disponibile (2.2.2) mentre nei sistemi CDMA gli utenti utilizzano tutta la banda a disposizione in quella trasmissione, e ciò che diminuisce all'aumentare del numero di utenti, è la potenza utilizzata da ogni utente. Anche nei sistemi FDMA la potenza per utente diminuisce, ma il SNR non cambia perché la potenza di rumore risulta essere  $P_n = \frac{N_0 B}{N}$ .

Il caso di utenti non cooperativi è il meno favorevole dal punto di vista della capacità, a causa del termine di rumore additivo introdotto dalle interferenze tra utenti.



**Figura 3.1.1** Andamento della capacità per utente di sistemi T-FDMA (in blu), CDMA cooperativo (in verde), CDMA non cooperativo (in rosso) al variare del numero di utenti ammessi

La stessa simulazione si può ripetere cambiando alcuni parametri come la potenza complessiva in trasmissione e la banda utilizzata. Possiamo ad esempio supporre di trasmettere con una potenza di 10W e una banda di 1kHz per avere un'idea di come aumenti la capacità di canale.

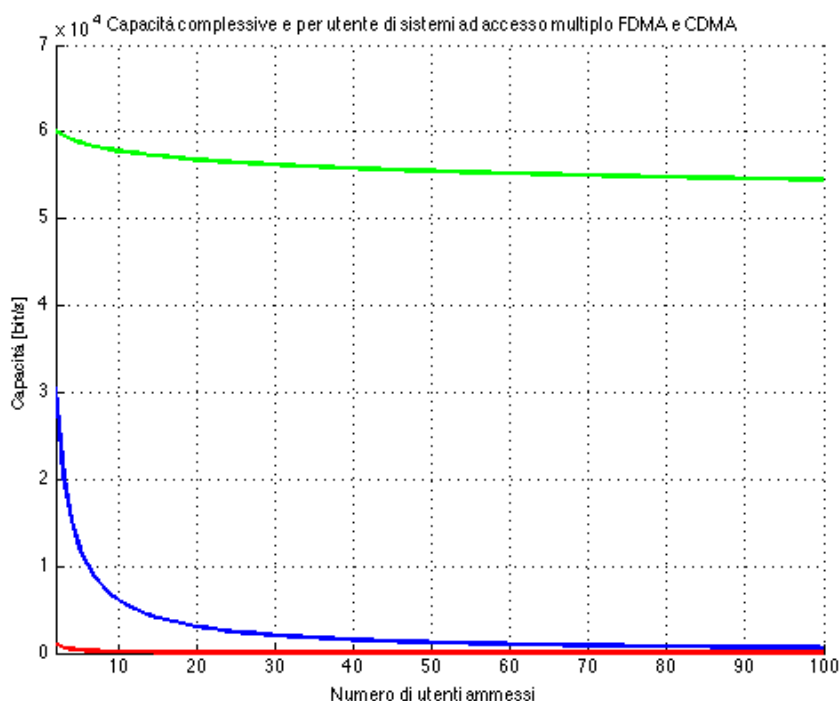
In figura 3.1.2 è mostrato il risultato di questa assunzione.

Come si nota, i diversi andamenti delle capacità al variare del numero di utenti sono gli stessi ottenuti con i parametri precedenti; tuttavia, grazie all'aumento della banda e della potenza complessiva in trasmissione, i valori di capacità sono aumentati notevolmente.

Nei sistemi presentati in figura 3.1.1 infatti, avevamo valori di capacità che arrivavano a circa 60 bit/s, mentre nel secondo caso i valori di capacità arrivano a decine di kb/s.

Questo risultato è utile per comprendere come, aumentando alcuni parametri in trasmissione, soprattutto come la banda utilizzata, si incrementi la capacità di canale complessiva e per utente.

L'obiettivo di questo studio però, è mostrare come i diversi sistemi reagiscono all'aumento di utenti ammessi, evidenziando i principali motivi per cui utilizzare un sistema CDMA o TDMA/FDMA.



**Figura 3.1.2** Andamento della capacità per utente di sistemi T-FDMA (in blu), CDMA cooperativo (in verde), CDMA non cooperativo (in rosso) al variare del numero di utenti ammessi

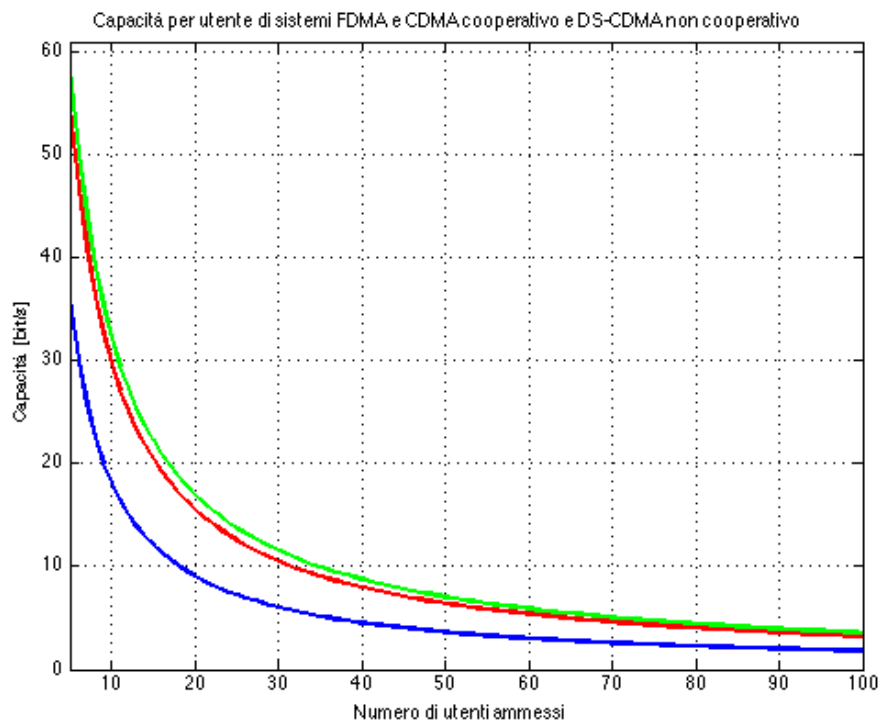
Presentiamo infine un risultato analogo, ovvero un confronto tra il classico sistema TDMA/FDMA e un sistema CDMA non cooperativo con modulazione a spettro espanso Direct Sequence con numero di chip pari a 8.

In figura 3.1.3 viene mostrato l'andamento della capacità per utente nel caso la trasmissione avvenga con una banda di 100Hz e una potenza complessiva in trasmissione di  $10^{-18}$ W.

Come si nota, la modulazione utilizzata permette di ottenere un risultato migliore nel caso CDMA non cooperativo classico nonostante la presenza dell'interferenza multi-utente.

Inoltre si osserva che, aumentando il numero di chip, la curva rossa si avvicina sempre più a quella verde ma non la supera mai. Questo significa che sistema DS-CDMA è tanto più vicino a un sistema CDMA cooperativo quanto più è elevato il numero di chip utilizzati per la modulazione.

La curva rossa, ha come limite superiore proprio la curva verde del CDMA cooperativo.



**Figura 3.1.3** Andamento della capacità per utente di sistemi TDMA/FDMA (in blu) e DS-SS non cooperativo (in rosso) e CDMA cooperativo (in verde)

Tutti questi risultati mostrano che, per un numero  $N$  di utenti, si ha più flessibilità nell'assegnazione della capacità per utente, prima e vera grande ragione per cui lo standard di terza generazione UMTS utilizza questi sistemi.

Questa flessibilità infatti, permette di assegnare ad ogni utente un canale con una capacità maggiore di quella assegnata nel caso FDMA e TDMA, garantendo la possibilità di inviare e ricevere dati a pacchetto con una velocità che rende la trasmissione compatibile con l'utilizzo che se ne vuole fare.

A tal proposito è utile fornire un esempio che chiarisce questo aspetto nel caso di due utenti.

Bisogna notare prima di tutto che, indipendentemente dal protocollo di accesso utilizzato, il limite superiore della somma dei rate (velocità di trasmissione) dei singoli utenti, è la capacità di canale complessiva (come suggerisce il secondo teorema di Shannon).

La figura 3.1.4 mostra questo particolare esempio, definendo due regioni di capacità: la prima, più chiara, rappresenta tutti i punti ammissibili per un sistema TDMA/FDMA dal punto di vista dei rate dei singoli utenti.

Questo risultato è in linea con le considerazioni presentate nella teoria, in cui si è visto che la capacità complessiva del sistema viene equiripartita tra i singoli utenti in modo permanente. Se ad esempio la capacità complessiva di canale è di 100 bit/s e gli utenti sono due, ogni utente potrà trasmettere con una velocità al più pari a 50 bit/s.

Nel caso CDMA invece, come già si è ottenuto in teoria e attraverso le simulazioni, la capacità non viene equiripartita, ma presenta una dipendenza dal numero di utenti più complessa.

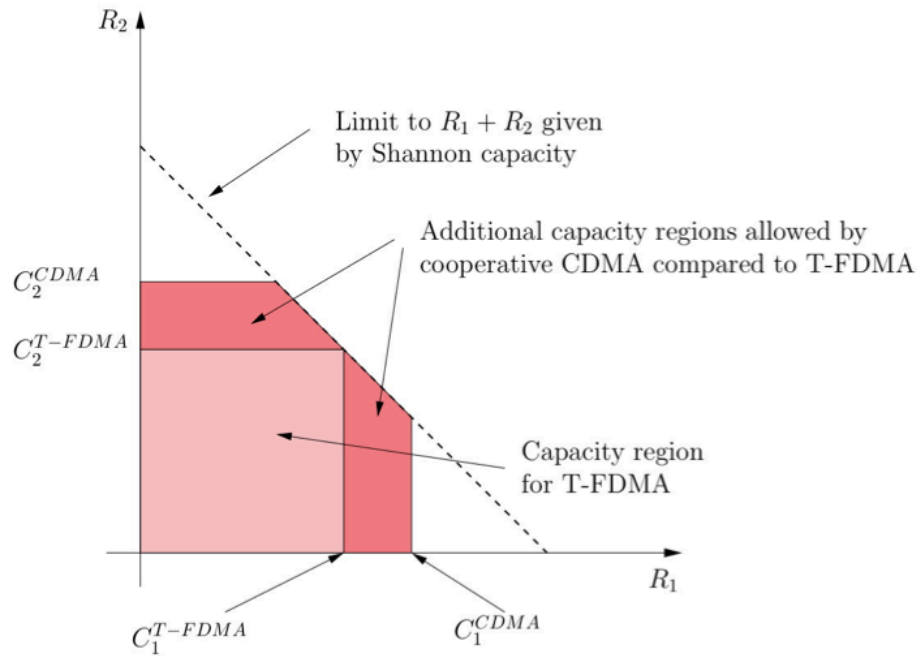
In particolare, ponendo sempre l'attenzione sulla figura 3.1.4, il sistema CDMA cooperativo, presenta una regione di capacità più ampia.

Questa regione addizionale, rappresentata nel grafico dalla regione più scura, permette la maggiore flessibilità di cui si è già accennato, rendendo i sistemi CDMA cooperativi certamente più adatti a tutti quei sistemi che necessitano di grandi capacità per utente e della possibilità di assegnare ad un canale dedicato ad un particolare utente, capacità più grandi o più piccole a seconda delle esigenze, sistema decisamente più dinamico.

Occorre comunque notare che la somma dei rate è comunque sempre limitata dalla capacità di Shannon.

Possiamo esprimere questa condizione come segue:

$$\sum_i R_i < C = B \log_2(1 + SNR) \quad (3.1.1)$$



**Figura 3.1.4** Confronto tra le regioni di capacità di sistemi TDMA/FDMA e sistemi CDMA cooperativi [Di Benedetto, Comunicazioni elettriche Approfondimenti,2008]

## BIBLIOGRAFIA

Cusani R. - Inzerilli T., 2008 “Teoria dell’informazione e codici”, Edizioni Ingegneria 2000, Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni (DIET) Facoltà di Ingegneria dell’informazione, informatica e statistica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Roma

Di Benedetto M.G., 2007 “Comunicazioni elettriche, Fondamenti”, Pearson Addison-Wesley, Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni (DIET) Facoltà di Ingegneria dell’informazione, informatica e statistica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Roma

Di Benedetto M.G., 2008 “Comunicazioni elettriche, Approfondimenti”, Pearson Addison-Wesley, Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni (DIET) Facoltà di Ingegneria dell’informazione, informatica e statistica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Roma

Gerakoulis D. – Geraniotis E., 2001 “CDMA: Access and switching ”, John Wiley&Sons, AT&T Labs-Research, San Antonio (Texas), University of Maryland (Maryland), USA

Cusani R., 1996, “Teoria dei segnali”, Edizioni Ingegneria 2000, Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni (DIET) Facoltà di Ingegneria dell’informazione, informatica e statistica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Roma

Viterbi A.J., 1979, "Spread Spectrum Communications - Myths and Realities", IEEE Communications Magazine, Volume 17, Issue 3

Mackay D.J.C., 2003, “Information theory, inference and learning algorithms” Copyright Cambridge University Press, University of Cambridge, Cambridge, UK

Di Benedetto M.G., 2014, “Dispense del corso *Wireless Access*”, Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni (DIET) Facoltà di Ingegneria dell’informazione, informatica e statistica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Roma

## **Allegato**

Si allega CD ROM contenente il documento Microsoft Word della tesi e la presentazione della stessa realizzata tramite diapositive con Microsoft Power Point.