



Università degli studi di Roma “La sapienza”

Facoltà di Ingegneria

Tesi di Laurea Specialistica in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Tecniche acustiche di inversione temporale e DOA con applicazione al segnale UWB

Relatore:

Prof. Maria Gabriella Di Benedetto

Co-Relatore:

Ing. Luca De Nardis

Candidato:

Federico Guerra

matricola:

795274

Anno accademico 2008-2009

*Dedico questo lavoro alla mia famiglia, alla mia ragazza
e a tutte le persone che mi
vogliono bene e che in questi anni
hanno creduto in me.*

Ringraziamenti

Desidero ringraziare in particolar modo la professoressa M.-G. Di Benedetto per avermi dato la possibilità di lavorare ad un progetto così interessante e in un ambiente, il laboratorio ACTS, così ricco di idee e personale qualificato.

Un ringraziamento particolare va all'ing. Luca De Nardis per la grande disponibilità (le ore passate, articoli alla mano, nel suo box a 20° C sono state fondamentali!).

Ringrazio l'ing. Daniele Domenicali (Dome) per il suo supporto nell'utilizzo del MATLAB e la professionalità.

Grazie anche al mio ex collega di box Gianni per i consigli sempre utili, ma anche per i "Buongiorno", e a tutti gli altri tesisti del laboratorio.

Ringrazio infine la mia fidanzata Roberta per essermi sempre stata accanto e, anche se ancora non sa cosa sono le telecomunicazioni, per l'interesse verso la mia tesi.

Indice

Introduzione	vi
1 Time Reversal	1
1.1 Introduzione e cenni storici	1
1.2 Time reversal di ultrasuoni	4
1.2.1 Tecniche di focalizzazione adattive	6
1.2.2 Time-Reversal approccio a filtro adattato	8
1.3 Time reversal iterativo	13
1.4 Time reversal di onde elettromagnetiche	14
2 Stima della direzione d'arrivo DOA	21
2.1 Introduzione	21
2.2 MUSIC	22
2.2.1 Modello basato sulla matrice di covarianza	23
2.2.2 Interpretazione geometrica	27
2.3 Algoritmo	29
2.4 Implementazione del MUSIC	30

3	Stima DOA in parziale coerenza spaziale	34
3.1	Presenza di errori nel modello	34
3.2	Formulazione del problema	35
3.3	MUSIC con decorrelazione spaziale	38
3.4	Metodo di Paulraj-Kailath	41
3.4.1	Confronto MUSIC metodo Paulraj-Kailath	44
3.4.2	Applicazione Paulraj-Kailath al <i>root</i> MUSIC	46
4	Time reversal: Analisi della convergenza	48
4.1	Operatore di Time reversal	48
4.1.1	La matrice di trasferimento	49
4.1.2	Modello matematico del TR iterativo	50
4.1.3	Operatore <i>time-reversal</i> per scatterer puntiformi	52
4.2	Decomposizione dell'operatore di time reversal	54
4.2.1	Determinazione degli autovettori di $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$	55
4.3	Metodo D.O.R.T.	56
5	Time reversal e MUSIC	59
5.1	Introduzione	59
5.2	Formulazione matematica	61
5.2.1	Analisi matrice di Time-reversal	63
5.3	Implementazione Time-reversal MUSIC array passivo	66
5.4	Simulazioni effettuate in MATLAB	69
5.4.1	TR-MUSIC per segnali a banda stretta	70
5.4.2	TR-MUSIC su segnali UWB	72
5.5	Comportamento in presenza di rumore e disturbi frequenziali	74

INDICE	v
<hr/>	
Conclusioni	79
Bibliografia	80
Elenco delle figure	83

Introduzione

La capacità di rilevare segnali e valutarne caratteristiche come posizione della sorgente o direzione d'arrivo è di fondamentale importanza in molte applicazioni. In diverse situazioni d'emergenza per avere un'elevata efficacia e prontezza, è necessario ottenere notevoli accuratezze di stime della DOA (*direction of arrival*). Si pensi ad esempio all'individuazione di persone sommerse da valanghe in cui, nonostante la complessità del mezzo, la precisione di stima della posizione deve essere molto elevata in modo da minimizzare il tempo necessario per l'intervento.

L'obiettivo primario di questo lavoro è l'utilizzo congiunto della tecnica dell'inversione temporale e del MUSIC, un algoritmo che, a valle di numerosi studi, è ritenuto fra quelli che forniscono le migliori stime DOA. Il TR (*time-reversal*) nonostante la sua iniziale applicazione nell'acustica, ha destato negli ultimi anni un interesse rilevante anche come tecnica per focalizzare onde elettromagnetiche. Gli aspetti interessanti del TR *signal processing*, sono fondamentalmente tre:

1. non necessita della conoscenza dei dettagli del canale
2. è in grado di correggere eventuali distorsioni sui fronti d'onda

3. riduce la complessità del ricevitore.

Algoritmi che si basano su scomposizioni in sottospazi hanno come prerequisito fondamentale la modellizzazione del problema. Il fatto ne limita fortemente l'impiego soprattutto quando, in presenza di mezzi non omogenei, le assunzioni iniziali vengono meno. Inserire il TR con le sue caratteristiche in uno scenario in cui la DOA è stimata attraverso il MUSIC aumenta non solo il livello di risoluzione ottenibile ma anche il numero di scenari in cui l'algoritmo può essere impiegato. La nuova metodologia elaborativa viene infine impiegata su diverse frequenze ottenute applicando un filtraggio passabanda su segnali UWB.

La tesi è strutturata in cinque capitoli:

nel primo viene illustrata la teoria che stà alla base della meccanica del *time-reversal*, in primis il suo utilizzo su onde acustiche e successivamente, servendomi della descrizione di un esperimento realizzato da M. Fink, su quelle elettromagnetiche.

Il secondo e terzo capitolo sono invece dedicati alla descrizione e all'implementazione del MUSIC(algoritmo in grado di fornire stime della DOA e del numero di sorgenti), di una sua versione modificata(Paulraj-Kailath) che permette, sotto certe ipotesi, di superare limitazioni nell'applicabilità del MUSIC in mezzi tempo-varianti. In entrambi i capitoli sono mostrate simulazioni da me effettuate per evidenziare l'influenza di alcuni parametri presenti nel modello matematico su cui si fondano gli algoritmi *subspace-based* per la stima delle direzioni d'arrivo e del numero di segnali.

Il quarto capitolo è una sorta di introduzione dell'ultimo, in cui è spiegato accuratamente il metodo D.O.R.T., un modo per esprimere matricialmente il

time-reversal e sfruttare in array attivi la sua elaborazione per rilevare target basandosi sui loro coefficienti di riflessione.

Il quinto capitolo consiste di due parti: nella prima è mostrato il link logico fra *time-reversal* e il MUSIC, con annessa possibile procedura elaborativa; nella seconda il TR-MUSIC è applicato sia su segnali a banda stretta che a quelli UWB. In questa si concentra gran parte del mio sforzo simulativo, svolto con l'ausilio di MATLAB.

Capitolo 1

Time Reversal

1.1 Introduzione e cenni storici

Immaginando la seguente situazione: un sasso viene gettato in uno stagno generando delle onde che si propagano a partire dalla posizione di contatto con le acque. A questo punto, bloccando la scena e proiettando il film al contrario, le increspature si propagheranno nella direzione della sorgente originale, fino a riprodurre l'impulso che ha generato le fluttuazioni iniziali.

Concettualmente questo è il *Time Reversal*(TR). L'inversione temporale può essere pensato come un metodo che sfrutta la contro-propagazione delle onde per focalizzare l'energia della stessa in una specifica posizione e in un determinato istante temporale [2]. L'applicazione dell'inversione temporale alle onde risale a molti anni fa. Nel 1965, Parvulescu e Clay hanno studiato la tecnica, da loro chiamata "*matched signal*". Il loro esperimento consisteva nella trasmissione di un segnale il quale, dopo essere stato ricevuto, veniva invertito temporalmente e ritrasmesso in broadcast. La prima dimostrazione dell'inver-

sione temporale è quindi ascrivibile a Parvulescu e Clay. L'utilizzo della tecnica a segnale adattato permise di compensare le distorsioni sul segnale ricevuto dovute al fenomeno del riverbero (distorsione da multi-path), dando luogo ad un incremento del rapporto segnale rumore. In aggiunta, tale processo, focalizza spazialmente l'arrivo delle onde. L'attività dei ricercatori fra gli anni settanta e i primi anni ottanta ha portato alla realizzazione di uno specchio unico per effettuare la coniugazione di fase ottica (*Optical Phase Conjugator OPC*). Lo specchio è il mezzo in grado di far tornare indietro un raggio incidente, esattamente nella stessa direzione da cui lo si è ricevuto. Gli OPC realizzano approssimativamente il *Time Reversal* ma se ne discostano, dal momento che lavorano esclusivamente su onde monocromatiche mentre il TR opera in qualsiasi banda di frequenza. Il TR venne successivamente applicato nel 1991 all'acustica sottomarina per correggere distorsioni da multi-path e ottenere un *narrow beam* migliorando in questo modo la focalizzazione dell'energia acustica trasmessa. Un importante risultato in questo ambito fu la possibilità di inseguimento di target mobili per mezzo del TR. Agli inizi degli anni novanta, il progredire delle tecnologie microelettroniche e nello studio degli array, congiuntamente con l'introduzione di nuovi strumenti teorici, hanno portato Fink e i suoi collaboratori dell'Università di Parigi VII allo sviluppo di un dispositivo per l'inversione temporale nell'acustica *Time Reversal Mirror* (TRM) [3–5]. Fink nel Laboratorio di Onde e Acustica (OLA) notò che, ogni cosa pronunciata davanti ad un array di microfoni e megafoni veniva riascoltata ma al contrario. Gli echi della parola “hello” diventano quasi istantaneamente “olleh”. La cosa sorprendente fu che il suono, invece che disperdersi nella stanza, veniva ritrasmeso esattamente verso la sorgente vocale, come se il tempo fos-

se stato invertito. Il processo è infatti noto come *acoustics time reversal* e l'array che si trova di fronte al parlatore agisce come un *time-reversal mirror*. L'inversione temporale nell'acustica è possibile poichè il suono è composto di onde. La voce produce vibrazioni che si propagano nell'aria proprio come le increspature generate dalla caduta di un grave su una superficie d'acqua. Una proprietà fondamentale è legata al fatto che due o più onde, passanti per uno stesso punto e con corrispondenza di picchi e valli, tendono a rinforzarsi. Di contro la combinazione in un punto di onde senza coincidenza di picchi e valli comporta l'annullamento delle medesime. Questo processo avviene costantemente ovunque il suono si propaghi. Gli echi riflessi da ostacoli o pareti causano il mixing di differenti porzioni della stessa onda. La teoria alla base del processo d' inversione temporale sfrutta una proprietà elementare dell'equazione d'onda in mezzi senza perdita. L'equazione d'onda è in generale un'equazione differenziale in cui l'operatore derivata temporale appare solo al secondo ordine, quindi se il campo scalare pressione $p(\vec{r}, t)$ è soluzione, lo sarà anche $p(\vec{r}, -t)$. In altre parole, in assenza di assorbimento da parte del mezzo durante la propagazione, l'equazione d'onda è invariante alla trasformazione di inversione temporale. Il processo di TR consiste, sperimentalmente, in un primo step detto di *forward propagation* seguito da uno di *backward propagation*. Nella prima fase, una sorgente emette un'onda che, dopo essersi propagata nel mezzo, giunge ad uno o più ricevitori. I segnali rivelati dai singoli ricevitori sono successivamente invertiti nel tempo e riinoltrati in broadcast dai punti in cui sono posizionati i ricevitori. L'insieme dei ricevitori realizza quello che è chiamato TRM. L'onda seguirà il medesimo percorso in ambo gli step. Le onde che si contro-propagano giungono simultaneamente e in fase sulla sorgente

originale, dando luogo al cosiddetto *time reversed focus*.

1.2 Time reversal di ultrasuoni

Per molti anni uno dei problemi significativi della propagazione di onde acustiche e ottiche è stato la correzione delle distorsioni di fase dei fronti d'onda ricevuti. La focalizzazione di un'onda su un target (fisso o mobile) attraverso un mezzo non omogeneo è una questione piuttosto importante da risolvere nell'acustica. In tale situazione infatti, a causa dell'interazione del campo con le non omogeneità presenti nel mezzo, si generano distorsioni. L'utilizzo di un TRM rappresenta una soluzione originale del problema. M. Fink e i suoi collaboratori, servendosi di un array di trasduttori piezoelettrici, hanno sviluppato uno specchio che lavora nella gamma degli ultrasuoni. L'inversione temporale di ultrasuoni è quindi un modo per ottenere la focalizzazione in un mezzo non omogeneo. Il TRM è un array di trasduttori rice-trasmettitori con risposta lineare che permettono il campionamento della pressione acustica incidente. La strategia dell'inversione temporale si introduce nell'ambito delle tecniche classiche per focalizzare onde impulsive attraverso mezzi non omogenei (tecniche *adaptive time-delay*). La focalizzazione così ottenuta è ottima, poichè realizza un filtro adattato spazialmente e temporalmente alla funzione di trasferimento del canale. E' una tecnica auto-adattiva in grado di compensare sia distorsioni dovute alla struttura geometrica dell'array che quelle causate dalla propagazione attraverso mezzi non omogenei. Il TRM dal momento che lavora su segnali impulsivi a banda larga piuttosto che su quelli monocromatici, può essere considerato una generalizzazione dell'OPC . Un confronto fra i due

mostra che: l'OPC lavora in continua mentre il TRM permette l'inversione di una qualunque finestra temporale. Il campo pressione $p(\mathbf{r}_i, t)$ rilevato con un insieme di elementi trasduttori in posizione \mathbf{r}_i è digitalizzato e memorizzato per un intervallo di tempo \mathbf{T} . Il campo è successivamente ritrasmesso dagli stessi trasduttori in modo inverso (LIFO *last in, first out*), ciò equivale alla trasmissione di $p(\mathbf{r}_i, T - t)$. La procedura consente di trasformare un'onda acustica, da divergente ad una convergente che si focalizza sul trasmettitore. Diversamente da uno specchio ordinario, che genera un'immagine virtuale di un oggetto acustico, il TRM produce un'immagine acustica reale della sorgente. Il processo può essere utilizzato per la focalizzazione su un target riflettivo che, dopo essere stato illuminato, si comporta come una sorgente acustica. Le ricerche effettuate da Fink nella gamma degli ultrasuoni avevano come obiettivo primario il superamento delle limitazioni nella litotripsia. Infatti la concentrazione degli ultrasuoni distruttivi attraverso tessuti non omogenei è molto complessa. Le discontinuità possono distorcere e deviare il fascio. Per una terapia efficace si deve, non solo individuare i calcoli, ma anche inseguire i loro movimenti dovuti ad esempio alla respirazione. Illuminata la zona di interesse utilizzando un array di trasduttori, il campo riflesso è misurato dall'intero array, invertito temporalmente e ritrasmesso. Iterando il processo, il fascio di ultrasuoni selezionerà il target con riflettività maggiore. Se il target è esteso il processo convergerà in uno spot le cui dimensioni dipendono solo dalla grandezza del TRM e dalla lunghezza d'onda.

1.2.1 Tecniche di focalizzazione adattive

Le tecniche di focalizzazione *time-delay* si basano sull'utilizzo di array di trasduttori. I segnali pressione che giungono da sorgenti acustiche sono rilevate da ogni elemento trasduttore e digitalizzate. In seguito viene utilizzato un algoritmo di cross-correlazione per stimare i ritardi temporali fra i segnali ricevuti da elementi vicini dell'array. I ritardi determinano la caratteristiche tempo-ritardo ottima per avere la focalizzazione sulla sorgente. In Figura 1.1, viene mostrato che, per compensare la curvatura sferica dei segnali ricevuti dall'array e ottenere la focalizzazione in un mezzo omogeneo, si utilizzano un set di linee di ritardo (*thick bars*). I segnali ecografici quindi, prima di essere sommati, sono

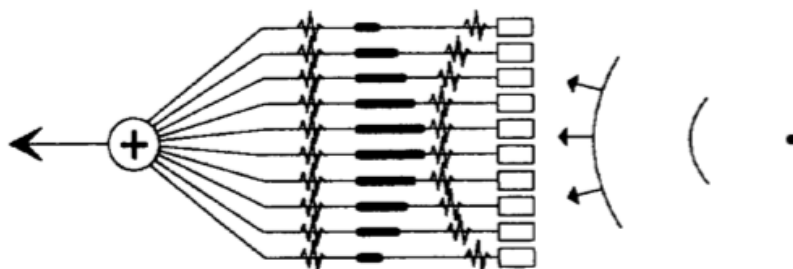


Figura 1.1: Cylindrical beamforming (assenza di aberrazione).

riportati in fase. In presenza di un mezzo aberrante (Figura 1.2), i segnali ricevuti non sono più allineati secondo una caratteristica di ritardo sferica. Per compensare tale sfasamento, vengono introdotte ulteriori linee di ritardo in grado di rifasare i vari contributi misurati prima di effettuarne la sommatoria. I ritardi temporali appropriati sono determinati dallo shift temporale che corrisponde al picco della cross-correlazione fra segnali misurati da trasduttori vicini.

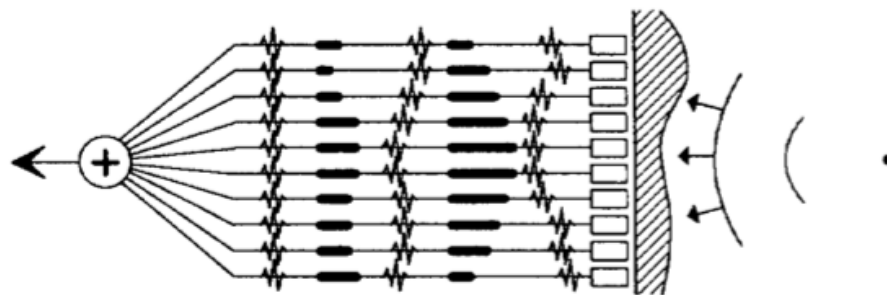


Figura 1.2: Cylindrical beamforming(presenza di aberrazione).

Un'altra tecnica consiste nella massimizzazione, rispetto alla legge di ritardo temporale, dell'energia dei segnali ricevuti. Le due tecniche sono simili poiché la massimizzazione dell'energia può essere vista come una massimizzazione della cross-correlazione fra tutte le coppie di segnali in uno stesso istante di tempo. Il problema legato al loro utilizzo è che raramente danno luogo ad una focalizzazione ottima. In entrambi i casi infatti, l'assunzione sottintesa è che il mezzo modifica solamente il ritardo di propagazione. La conoscenza della caratteristica di ritardo temporale è quindi sufficiente per ottenere una focalizzazione accurata. Tuttavia questa è un'ipotesi molto restrittiva dal momento che vale solo per aberratori sottili e molto vicini all'array. In realtà un'onda che si propaga in un mezzo non omogeneo non verrà solo ritardata, ma subirà anche distorsioni spaziali e temporali causate da rifrazioni, diffrazioni e multiscattering. Le tecniche di focalizzazione *adaptive time-delay* non danno risultati attesi al crescere della distanza fra il mezzo aberrante e l'array. In tali situazioni è impiegato il processo d'inversione temporale poiché tiene conto di tutte le informazioni registrate dal mezzo(caratteristiche di ritardo temporale e variazione di forma).

1.2.2 Time-Reversal approccio a filtro adattato

La tecnica di concentrazione dell'energia, mediante TR in presenza di mezzi non omogenei, è più robusta di quelle che analizzano i ritardi temporali. Il *time-reversal focusing* è fortemente legato al principio del filtro adattato impiegato nel processamento dei segnali. Il ben noto principio afferma che: l'uscita di un dato sistema lineare con risposta impulsiva $h(t)$ è massimizzata utilizzando in ingresso un segnale del tipo $h(-t)$. La risposta risultante è data dalla convoluzione $h(t) \otimes h(-t)$ ed è una funzione pari, con massimo in $t = 0$ e corrisponde con l'energia del segnale di input. La tecnica di *TRM focusing* fornisce ai trasduttori dell'array gli input che massimizzano la pressione sul target. La sua analisi si basa sul principio di reciprocità ed è quindi valida in qualsiasi mezzo non omogeneo senza perdita e per qualsiasi insieme di trasduttori usati come rice-trasmettitori (dimensione, ritmo di campionamento, geometria). Il campo in \mathbf{r}_0 , dopo la trasmissione sul trasduttore E_i di un'eccitazione impulsiva con velocità normale ($v_n(t) = \delta(t)$), può essere rappresentata da un potenziale velocità acustica $\phi(\mathbf{r}_0, t) = h_i^t(\mathbf{r}_0, t)$ in cui $h_i^t(\mathbf{r}_0, t)$ è la risposta impulsiva. Il campo è ottenuto derivando nel tempo $h_i^t(\mathbf{r}_0, t)$, come $\rho_0 = (\partial h_i^t(\mathbf{r}_0, t))/\partial t$. La risposta impulsiva dell'elemento E_i in \mathbf{r}_0 , per trasduttori di dimensione finita, non è semplicemente un impulso di dirac ritardato ma un segnale di durata diversa da zero. L'estensione è legata ai differenti tempi di trasmissione degli impulsi che giungono in \mathbf{r}_0 dai punti sorgente di Huygens sull'apertura dell'array. Un risposta impulsiva simile $h_i^r(\mathbf{r}_0, t)$ può essere definita anche in ricezione e rappresenta la forza acustica generata da una sorgente di pressione impulsiva in \mathbf{r}_0 , che agisce sul trasduttore. Le solu-

zioni analitiche delle risposte impulsive di diffrazione possono essere ricavate in mezzi omogenei per particolari geometrie dei trasduttori. La loro valutazione in mezzi non omogenei è invece piuttosto complessa.

Nel TR il punto cruciale non è stimare le singole risposte, ma mostrare la loro equivalenza in trasmissione e in ricezione, anche in presenza di mezzi non omogenei. Per il teorema della reciprocità, la posizione del punto sorgente e dell'osservatore possono essere invertiti senza che si alteri la pressione acustica misurata. Il teorema ha validità sia in mezzi omogenei che in quelli non omogenei senza perdita. Introducendo la funzione di Green G tale che $G(\mathbf{r}_0, t_0|r, t)$ è il campo prodotto in \mathbf{r} al tempo t da una sorgente impulsiva in \mathbf{r}_0 eccitata al tempo t_0 , il teorema della reciprocità può essere scritto come:

$$G(\mathbf{r}_0, t_0|r, t) = G(\mathbf{r}, t_0|\mathbf{r}_0, t). \quad (1.1)$$

Poichè $h_i^t(\mathbf{r}_0, t)$ è l'integrale di $G(\mathbf{r}, t_0|\mathbf{r}_0, t)$ sulla superficie del trasduttore S_i :

$$h_i^t(\mathbf{r}_0, t) = \int_{S_i} G(\mathbf{r}, t_0|\mathbf{r}_0, t) dr \quad (1.2)$$

e $h_i^r(\mathbf{r}_0, t)$ è l'integrale di $G(\mathbf{r}_0, t_0|r, t)$ in S_i

$$h_i^r(\mathbf{r}_0, t) = \int_{S_i} G(\mathbf{r}_0, t_0|r, t) dr. \quad (1.3)$$

Il teorema della reciprocità ci dice che le due risposte impulsive sono identiche. Nel seguito saranno scritte come $h_i(\mathbf{r}_0, t)$. L'osservazione fatta è valida ovvia-

mente in mezzi omogenei dal momento che la funzione di Green $G(\mathbf{r}_0, t_0 | r, t)$ si riduce a $\delta(t - t_0 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| / c_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, che non cambia al variare di \mathbf{r} e di \mathbf{r}_0 . Nel seguito verrà presa in considerazione la risposta acustico-elettrica dei trasduttori. In trasmissione, $h_i^{tae}(t)$ lega l'input elettrico con la velocità normale di output. In ricezione invece $h_i^{rae}(t)$ relaziona la forza acustica d'ingresso alla tensione d'uscita. In generale, queste due risposte impulsive sono equivalenti e scritte $h_i^{ae}(t)$. Il processo di focalizzazione attraverso il TR in mezzi non omogenei, come in parte già osservato, consiste di tre step.

1. **Target illumination:** trasmissione di un segnale attraverso il mezzo non omogeneo, dall'array al target. Il target genera un campo pressione di *backscattering* che è distorto dal mezzo.
2. **Recording step:** il campo pressione di *backscattering* è memorizzato da un'array di trasduttori.
3. **Time reversed field:** l'array di trasduttori genera sulla sua superficie il campo invertito temporalmente, questo si propaga nel mezzo aberrante e si focalizza sul target.

Dopo il primo step, il bersaglio puntiforme in \mathbf{r}_0 , si comporta come una sorgente acustica. Il segnale elettrico osservato (segnale di output) in E_i è in convoluzione con una forma d'onda costante ed è dato da

$$h_i^{ae}(t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, t). \quad (1.4)$$

I segnali nel secondo step sono memorizzati in ogni elemento trasduttore. Tale

fase è mostrata sia in mezzi omogenei (Figura 1.3(a)) che in quelli non omogenei (Figura 1.4(a)). Nell'ultimo caso i segnali misurati dai singoli elementi dell'antenna possono avere forme molto differenti tra loro. Infine, questi segnali sono invertiti temporalmente generando il seguente input:

$$h_i^{ae}(T-t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, T-t). \quad (1.5)$$

I segnali vengono successivamente ritrasmessi dallo stesso elemento trasduttore. Il calcolo del campo acustico totale in \mathbf{r}_0 , generato dal TRM, ha inizio considerando quello prodotto da un singolo elemento trasduttore E_i . Il valore risultante è la convoluzione fra il segnale elettrico di input ($h_i^{ae}(T-t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, T-t)$) e quella fra la risposta acustico-elettrica in trasmissione e la risposta impulsiva di diffrazione ($h_i^{ae}(t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, t)$) ed è scritta come:

$$h_i^{ae}(T-t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, T-t) \otimes h_i^{ae}(t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, t). \quad (1.6)$$

Il segnale invertito temporalmente è l'input ottimo per un sistema lineare definito da due risposte impulsive consecutive $h_i^{ae}(t)$ e $h_i(\mathbf{r}_0, t)$. Indipendentemente dalla posizione dell'elemento E_i , per $t = T$ viene raggiunto il massimo del campo in \mathbf{r}_0 (parte destra di Figura 1.3(b) e Figura 1.4(b)) Il campo acustico totale prodotto dal TRM è ottenuto attraverso la trasmissione simultanea dei campi pressione invertiti temporalmente, generati da tutti gli elementi. In \mathbf{r}_0 si ottiene, dunque, la somma di tutti i contributi individuali dei trasduttori:

$$\sum_i h_i^{ae}(T-t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, T-t) \otimes h_i^{ae}(t) \otimes h_i(\mathbf{r}_0, t). \quad (1.7)$$

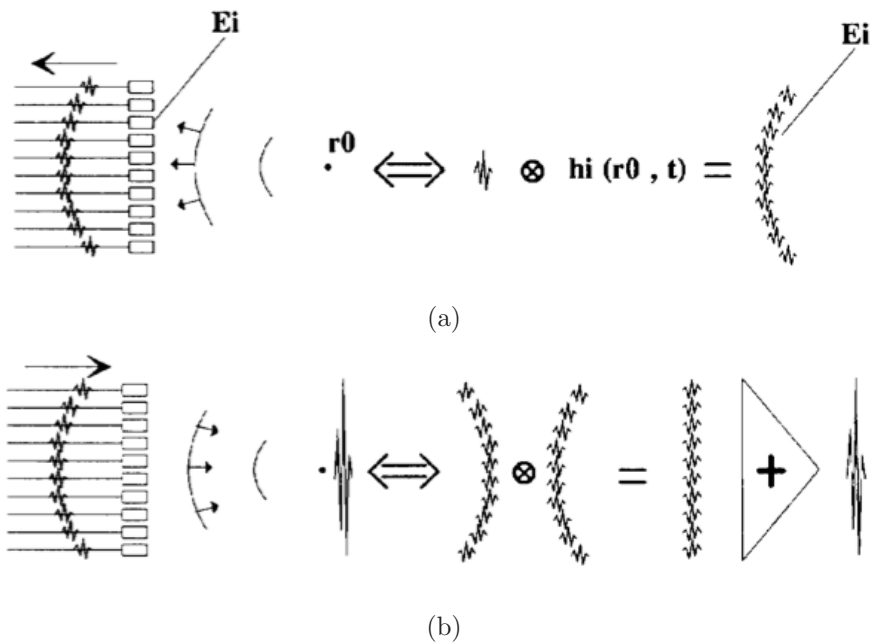


Figura 1.3: Approccio a filtro adattato del TRM focusing (mezzo omogeneo)

I segnali raggiungono individualmente i loro massimi in T dando luogo ad un interferenza costruttiva. Il processo analizzato, per una fissata energia di input, restituisce un campo che è massimo in r_0 . In mezzi omogenei i fronti d'onda generati dalla sorgente puntiforme hanno un andamento sferico (parte sinistra della Figura 1.3(a)); in mezzi aberranti invece le distorsioni sui fronti fanno perdere la caratteristica sferica (Figura 1.4(a)).

Il processo di *time-reversal* (Figura 1.3(b) e Figura 1.4(b)) permette la compensazione dei vari ritardi e la conseguente massimizzazione della pressione acustica sul target. Le risposte impulsive, quando sono presenti mezzi non

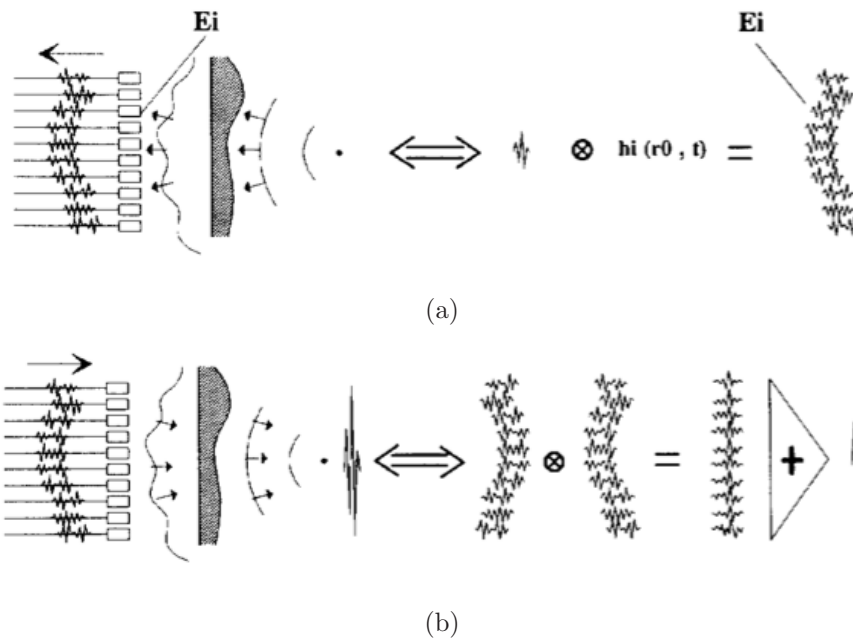


Figura 1.4: Approccio a filtro adattato del TRM (mezzo non omogeneo)

omogenei, sono piuttosto complesse e le singole forme, memorizzate dall'array, possono avere caratteristiche molto differenti fra loro; è proprio in questo scenario che il *time-reversal* appare come una soluzione ottima. In Figura 1.4(b), infatti, per il prodotto di convoluzione (1.6), tutti i singoli segnali raggiungono contemporaneamente il loro massimo nella posizione del target. Risultati sperimentali [4] hanno confermato la validità del modello considerato.

1.3 Time reversal iterativo

Il principale vantaggio del TRM è la possibilità di scelta dell'origine e della durata dei segnali da invertire temporalmente. La modalità iterativa ha inizio

con l'illuminazione di una regione contenente più target e darà luogo ad un fascio interamente focalizzato sul target più riflettivo. Le onde riflesse, dopo essere state memorizzate nell'array, sono invertite temporalmente e rimesse. L'onda trasmessa dopo il processo di time reversal dà luogo ad una seconda onda riflessa che viene, a sua volta, misurata e invertita temporalmente dagli stessi trasduttori secondo la procedura LIFO (*Last In First Out*). In presenza di due bersagli puntiformi l'iterazione del time reversal può essere riassunta nel modo che segue: Se due target A e B con riflettività a e b ($a > b$) sono ben risolti dall'array di sensori, il processo si focalizzerà sul target A. Dopo una trasmissione di tipo *wide beam*, l'onda invertita temporalmente è la somma di un'onda focalizzata su A di ampiezza relativa a e di una focalizzata su B di ampiezza relativa b . Queste due onde sono riflesse dai target generando due onde sferiche di ampiezze a^2 e b^2 . Dopo n iterazioni, le ampiezze relative α^n e β^n , saranno tali che, per n abbastanza grande, l'onda che si focalizza su B è trascurabile, il sistema si focalizzerà automaticamente sul target dominante (A). In generale, la situazione è molto più complessa poiché vi sono molti altri parametri da considerare tra cui il numero dei target, la loro posizione relativa rispetto all'array, le proprietà del mezzo di propagazione e la risoluzione spaziale del sistema.

1.4 Time reversal di onde elettromagnetiche

La prima dimostrazione sperimentale del “*time-reversal focusing*” su onde elettromagnetiche è stata effettuata da M. Fink nel 2004. Nell'acustica, come sottolineato, gli esperimenti sull'inversione temporale possono essere compiuti

con forme d'onda a banda stretta. In tali simulazioni, una sorgente emette un breve impulso che si propaga in un mezzo più o meno complesso (ma idealmente non dissipativo) ed è ricevuto da un array di trasduttori (TRM). I segnali registrati sono digitalizzati, memorizzati in memorie elettroniche, invertiti temporalmente, resi analogici e alla fine ritrasmessi dal TRM. È stato dimostrato che l'onda invertita converge sulla sorgente in modo più accurato in mezzi complessi e all'aumentare della larghezza di banda del segnale; questo ne rende interessante l'impiego in applicazioni come le rilevazioni del sottosuolo, l'analisi di scatterer e le telecomunicazioni. Recentemente esperimenti con ultrasuoni hanno mostrato che, impiegando il TRM, si può sfruttare la complessità del mezzo per trasmettere più dati. Da un punto di vista pratico il TRM è usato per focalizzare simultaneamente su ricevitori distanti poche lunghezze d'onda, una serie aleatoria di bit. Nel linguaggio della comunicazione corrisponde ad una configurazione MIMO-MU (*multiple input, multiple output-multiple user*). Il TRM permette di avere, in mezzi con riflessioni multiple, una risoluzione spaziale molto più accurata di quella raggiungibile in trasmissioni in spazio libero (*super-resolution*). Per estendere la tecnica del *time-reversal* ad onde elettromagnetiche, si deve tener conto del fatto che in molti ambienti reali (palazzi o città) le microonde con lunghezze d'onda fra i 10 e i 30 cm vengono riflesse da oggetti come pareti, scrivanie, auto e ciò dà luogo ad una moltitudine di percorsi tra trasmettitore e ricevitore. In tali situazioni un'antenna *time-reversal* dovrebbe essere in grado non solo di compensare il multipath, ma anche di incrementare il rate di trasferimento dell'informazione sfruttando, come avviene per gli ultrasuoni, le varie riflessioni.

La principale difficoltà che si incontra nel passaggio del *time-reversal* al caso di

onde elettromagnetiche è legata alla digitalizzazione di segnali a radio frequenza poichè questo necessita di frequenze di campionamento molto alte. Il segnale elettromagnetico usato da Fink e dai suoi collaboratori per effettuare l'inversione temporale aveva una struttura del tipo: $m_I(t) \cos(2\pi\nu_0 t) + m_Q(t) \sin(2\pi\nu_0 t)$ in cui ν_0 è la frequenza portante, $m_I(t)$ e $m_Q(t)$ sono i segnali in banda base. Per avere una frequenza di campionamento inferiore a ν_0 tutte le operazioni di *time-reversal* vengono effettuate sui segnali in banda-base. Il setup dell'esperimento prevedeva l'impiego di due antenne omnidirezionali alla frequenza centrale di $\nu_0 = 2.45 \text{ GHz}$ e due circuiti di bordo ricetrasmittitori. I circuiti permettono, in trasmissione, di codificare le componenti in fase(cos) e in quadratura(sin) del segnale in banda-base(etichettati rispettivamente con I e con Q) su un'onda a 2.45 GHz che può essere irradiata dall'antenna trasmittente. Lato ricevitore, il circuito di bordo demodula il segnale a radio frequenza riportandolo in banda-base.

L'esperimento venne effettuato in una cavità fortemente riverberante, un generatore di forme d'onda origina un breve impulso $m_I(t)$ sull'input I analogico del trasmettitore di bordo (Figura 1.5(a)) mentre in Q non è mandato alcun segnale(Figura 1.5(a')).

Un mixer genera il segnale in banda traslata $e(t) = m_I(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$, la forma d'onda $e(t)$ è trasmessa dalla prima antenna. Dopo la propagazione, il segnale $s(t) = m'_I \cos(2\pi\nu_0 t) + m'_Q \sin(2\pi\nu_0 t)$ è memorizzato dall'antenna ricevente e demodulato per ottenere le componenti I e Q del segnale di output $m'_I(t)$ e $m'_Q(t)$ osservabili mediante un oscilloscopio(Figura 1.5(b) e (b')). I segnali ricevuti, dopo aver trasmesso un impulso di $1 \mu s$, hanno una durata 8 volte superiore. Per invertire temporalmente il segnale $s(t)$,

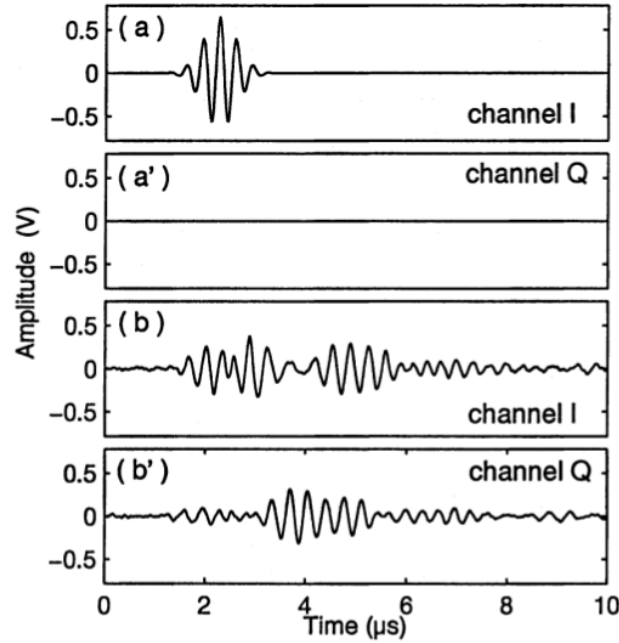


Figura 1.5: (a),(a') Rappresentazioni in banda base ($m_I(t)$ e $m_Q(t)$) dei segnali trasmessi. (b),(b') Rappresentazione in banda-base dei segnali riverberati nella cavità e ricevuti dalla seconda antenna

le componenti di banda-base (segnali $m'_I(t)$ e $m'_Q(t)$) sono digitalizzate da un oscilloscopio ad una frequenza di campionamento di 40 MHz , inviate ad un computer e capovolto l'ordine d'arrivo. Lo step successivo consiste nel rendere nuovamente analogici i segnali *time-reversed I Q* e usarli per modulare la forma d'onda con fase coniugata. Il segnale a radio frequenza risultante ($s(-t) = m'_I(-t) \cos(2\pi\nu_0 t) - m'_Q(-t) \sin(2\pi\nu_0 t)$) viene poi ritrasmesso. Il segnale rf che si contropropaga viene ricevuto e successivamente demodulato dalla prima antenna. Dalla Figura 1.6(a) si nota che, il segnale

ricevuto sul canale I è compresso nel tempo e quindi recupera la sua durata iniziale.

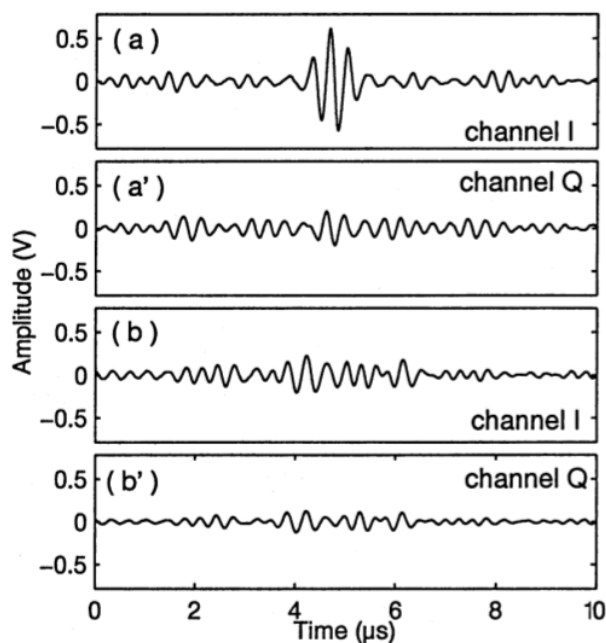


Figura 1.6: (a),(a') Rappresentazioni in banda base del segnale ricevuto dopo il *time-reversal*. (b),(b') Rappresentazione in banda-base del segnale ricevuto ad alcune lunghezze d'onda dall'antenna sorgente

L'operazione di *time-reversal* non è perfetta dal momento che il campo riverberato viene misurato da una singola antenna. La forma d'onda ricreata non è la replica esatta dell'impulso iniziale: ci sono lobi laterali attorno al picco sul canale I e un segnale è misurato sul canale Q (Figura 1.6(a')) anche se non viene inviato nulla su di esso. Effetti simili possono essere osservati per il *time-reversal* di ultrasuoni: è stato dimostrato che il rapporto segnale-rumore in un

esperimento di inversione temporale singolo canale varia come $\sqrt{\Delta\nu/\delta\nu}$, dove $\Delta\nu$ è la banda disponibile e $\delta\nu$ definisce la frequenza di correlazione del campo riverberato. $\delta\nu$ è l'ampiezza caratteristica della funzione di correlazione fra i campi $\int \langle \psi(\nu')\psi^*(\nu' + \nu) \rangle d\nu'$ in cui ψ è il campo elettromagnetico scatterato. Basandosi su quanto detto sopra ci si aspetta che, aumentando la banda del segnale o riducendo la frequenza di correlazione, possa essere ottenuta una maggiore compressione dell'impulso.

L'esperimento ha mostrato che il *time-reversal* non solo è in grado di compensare riverberazioni multiple e ricreare un breve impulso elettromagnetico sulla sorgente, ma si è verificato anche che l'ampiezza del segnale ricreato è massima in corrispondenza dell'antenna sorgente mentre assume valori bassi in altri punti della cavità (Figura 1.6(b) e (b')). La conclusione è coerente con i risultati ottenuti precedentemente con gli ultrasuoni in cui, considerando mezzi con uno scattering elevato e utilizzando strumenti in grado di effettuare il *time-reversal* singolo canale, l'impulso risulta chiaramente focalizzato sulla sorgente e solo su di essa, il livello di rumore alla sorgente è una volta ancora regolato da $\sqrt{\Delta\nu/\delta\nu}$. Qui, il ruolo della riverberazione come anche la larghezza di banda deve essere enfatizzata. Il *time-reversal* singolo canale indipendentemente dalla larghezza di banda del segnale non consente la focalizzazione in spazio libero; in mezzi riverberanti invece l'assenza di focalizzazione si ha solamente per segnali a banda molto stretta (come nel caso delle tecniche classiche di coniugazione di fase). Con una singola antenna *time-reversal* e considerando un'onda monocromatica pura su un particolare ricevitore, l'onda con fase coniugata non ha motivo di essere focalizzata in questo punto, dal momento che l'antenna ritrasmette solo un'onda sinusoidale con fronte d'onda sferico.

Ma se la banda $\Delta\nu$ è più grande della frequenza di correlazione $\delta\nu$; le componenti spettrali del campo riverberato ψ a due frequenze distanti più di $\delta\nu$ sono decorrelate: esistono circa $\Delta\nu/\delta\nu$ componenti decorrelate nello spettro del segnale riverberato. L'inversione nel tempo (coniugazione di fase coerente su tutta la banda e non su una singola frequenza) di tutte queste componenti comporta una somma coerente in $t=0$ e in corrispondenza della posizione del ricevitore; questo perchè le fasi sono state settate in modo che ritornano a zero lungo tutta la banda. Per cui, l'ampiezza in questo punto e in tale istante temporale cresce come $\Delta\nu/\delta\nu$, mentre lontano dal ricevitore (e lontano da $t = 0$) le varie componenti in frequenza si sommano incoerentemente e la loro somma cresce come $\sqrt{\Delta\nu/\delta\nu}$. Nel complesso, per segnali a banda larga, il rapporto picco-rumore aumenta come $\sqrt{\Delta\nu/\delta\nu}$; ciò fa capire come un esperimento di inversione temporale sia possibile anche su singolo canale, a patto che la banda sia sufficientemente più grande della frequenza di correlazione del mezzo propagativo.

Capitolo 2

Stima della direzione d'arrivo

DOA

2.1 Introduzione

La capacità di trasmettere e/o ricevere informazioni tra due punti senza una specifica connessione fisica è allettante in molte applicazioni. L'informazione è trasmessa dalle sorgenti sotto forma di onde con diversa natura, per esempio onde acustiche, elettromagnetiche o sismiche. Con il passare degli anni, l'incremento in complessità delle applicazioni ha comportato un aumento di segnali e dati da processare e la necessità di una robustezza ben superiore a quella garantita dalla comunicazione wireless singolo sensore. L'utilizzo d'array di sensori per la ricetrasmisione su canali wireless è una questione molto interessante e viene affrontata facendo particolari assunzioni. I sistemi multi-sensore presentano numerosi vantaggi rispetto a quelli singolo sensore. Primo:

mediante un appropriato processamento di segnale permettono l'ottenimento di un SNR m -volte superiore di quello singolo sensore, dove m è il numero di sensori dell'array. Secondo: gli array di sensori sono in grado di separare segnali multipli. Il fatto è molto utile ad esempio in comunicazioni wireless multi-utente che richiedono l'elaborazione del numero massimo di segnali senza mutua interferenza o nei radar passivi che necessitano la localizzazione delle sorgenti del segnale. In tale contesto la direzione d'arrivo(DOA) è uno dei parametri più importanti da valutare. Nei radar la stima DOA è un fattore importante per individuare target mentre nelle comunicazioni dà diversità spaziale al ricevitore permettendo scenari multi-utente. L'importanza della DOA nel processamento dei segnali d'array ha portato all'implementazione di un gran numero di algoritmi per la sua stima.

2.2 MUSIC

L'algoritmo MUSIC(MUltiple Signal Classification) appartiene alla classe dei metodi *signal subspace*. Questi ultimi, piuttosto che processare direttamente i dati ricevuti, sfruttano la matrice di correlazione ottenuta all'uscita dei sensori. MUSIC rientra fra i più studiati algoritmi *signal subspace* per la stima della direzione d'arrivo (DOA) [8]. In una dettagliata valutazione delle prestazioni, basata su centinaia di simulazioni, il Laboratorio Lincoln di MIT ha concluso che fra i gli algoritmi ad alta risoluzioni disponibili, MUSIC è senza dubbio il più promettente. La popolarità dell'algoritmo è dovuta in larga parte alla sua generalità; per esempio, può essere applicato ad array con configurazione e risposta arbitraria ma nota e per stimare diversi parametri

di sorgente (azimuth, elevazione, distanza, polarizzazione, ecc.). Il prezzo pagato per questa generalità è che la risposta dell'array, per tutte le possibili combinazioni dei parametri della sorgente, deve essere conosciuta. La risposta deve essere misurata (calibrata) e memorizzata oppure è possibile caratterizzarla analiticamente. In aggiunta, MUSIC richiede la conoscenza *a priori* delle statistiche spaziali del secondo ordine del rumore di fondo e del campo interferenza. Le assunzioni di conoscenza della risposta dell'array e della covarianza del rumore nella realtà non sono mai soddisfatte. I cambiamenti temporali, dell'ambiente circostante e della posizione dell'antenna, possono dar luogo a una risposta d'array significativamente differente rispetto a quella precedentemente calibrata. Errori sono possibili anche su array calibrati analiticamente per il fatto che gli elementi non sono realmente identici e che la loro non è nota in maniera accurata. Le performance dell'algoritmo possono, quindi, degradare significativamente all'aumentare dello scostamento della risposta attuale dal suo valore nominale. La variazione temporale dell'ambiente che circonda l'array e del suo orientamento rendono problematica la conoscenza delle statistiche reali del rumore.

2.2.1 Modello basato sulla matrice di covarianza

Lo scopo che si prefige la stima della DOA è la localizzazione di d sorgenti passive attraverso l'utilizzo di un array di m microfoni passivi. Il problema di base è determinare come l'energia si distribuisce nello spazio (sia esso aria, acqua o terra), considerando la posizione delle sorgenti come punti spaziali con elevata concentrazione di energia. Per attuare il MUSIC è necessario prima

di tutto sviluppare un modello per il segnale di uscita dell'array di microfoni posti in ricezione. Una volta derivato questo modello, il problema può essere trasformato in uno di stima parametrica abbastanza simile all'applicazione di ricerca di frequenze temporali. Le sorgenti generano un campo d'onda che viaggia attraverso lo spazio e che viene campionato, sia nello spazio che nel tempo, dall'array di microfoni. Nell'ipotesi che fronti d'onda ricevuti godano di perfetta coerenza spaziale ossia esista una relazione di fase fissa fra i valori del campo sui vari sensori dell'array. In trasmissione si hanno $d < m$ sorgenti a frequenza ω_0 che sono a banda-stretta, stazionarie, a valor medio nullo e mutuamente scorrelate. Un problema è classificato a banda stretta se la larghezza di banda è piccola rispetto all'inverso del tempo di transito di un fronte d'onda attraverso l'array. La formulazione del problema a banda-stretta non è restrittiva dal momento che problemi a banda-larga possono essere decomposti in un insieme di bande-strette filtrando i dati all'uscita dei sensori (filtri a pettine). Le sorgenti sono ad una distanza dall'array tale da permettere l'approssimazione di fronte d'onda piano. Su ogni sensore è presente un rumore modellabile come un processo aleatorio stazionario, a media nulla e indipendente da sensore a sensore. Il segnale ricevuto sul sensore i -esimo sarà:

$$r_i(t) = \sum_{k=1}^d s_k(t) e^{-j\omega_0(i-1)\Delta \sin \theta_k/c} + n_i(t). \quad (2.1)$$

in cui $s_k(\cdot)$ è il segnale emesso dalla sorgente k , θ_k è la direzione di arrivo media del k -esimo fronte d'onda, Δ è la spaziatura fra i sensori, c è la velocità di propagazione, $n_i(\cdot)$ è il rumore additivo sul sensore i -esimo. Le forme d'onda ricevute sull'array di m elementi sono quindi combinazioni lineari dei d fronti

incidenti e del rumore. La (2.1) può essere scritta in forma matriciale come:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2.2a)$$

dove $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{n}(t)$ sono vettori $m \times 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T(t) &= [r_1(t) \cdots r_m(t)] \\ \mathbf{n}^T(t) &= [n_1(t) \cdots n_m(t)], \end{aligned} \quad (2.2b)$$

$\mathbf{s}(t)$ è il vettore $d \times 1$ dei fronti d'onda incidenti,

$$\mathbf{s}^T(t) = [s_1(t) \cdots s_d(t)], \quad (2.2c)$$

e \mathbf{A} è una matrice $m \times d$ con colonne $\{\mathbf{a}_k^T, k = 1, \dots, d\}$ così definiti:

$$\mathbf{a}_k^T = [1 \cdots e^{-j\omega_0(i-1)\tau_k} \cdots e^{-j\omega_0(m-1)\tau_k}]. \quad (2.2d)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j\omega_0\tau_1} & \cdots & e^{-j\omega_0\tau_k} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-j\omega_0(m-1)\tau_1} & \cdots & e^{-j\omega_0(m-1)\tau_k} \end{bmatrix}$$

e con τ_k dato da

$$\tau_k = (\Delta/c) \sin \theta_k. \quad (2.2e)$$

La matrice \mathbf{A} , data la sua struttura, è detta *matrice di Vandermonde* e le sue colonne sono i vettori direzione di un ipotetico fronte d'onda planare (*steering vectors*). Il rango di tale matrice gode della seguente proprietà:

$$\text{rango}(\mathbf{A}) = d \quad \text{se } d < m \text{ e } \tau_k \neq \tau_p \quad \forall k \neq p. \quad (2.3)$$

Sia il rumore misurato sul segnale che quello generato dagli strumenti appaiono, nel modello (2.2a), in un vettore complesso $\mathbf{n}^T(t)$. Anche gli elementi di $\mathbf{r}(t)$ e \mathbf{A} sono in generale complessi. I termini a_{ij} sono funzioni note degli angoli d'arrivo dei segnali e delle posizioni degli elementi dell'array. In sostanza, a_{ij} dipende dall' i -esimo elemento dell'array, dalla sua posizione rispetto all'origine delle coordinate e dalla risposta ad una forma d'onda incidente dalla direzione del segnale j -esimo. La colonna j -esima di \mathbf{A} è il vettore delle risposte dell'array $a(\theta_j)$ ad un segnale con DOA θ_j . La conoscenza di $a(\theta_1)$ equivale a quella di θ_1 a patto che non si abbia una situazione irrisolvibile del tipo $a(\theta_1) = a(\theta_2)$ per $\theta_1 \neq \theta_2$ (ambiguità del primo tipo). Moltiplicando $\mathbf{r}(t)$ per il suo trasposto coniugato e prendendo il valore atteso, si ottiene la covarianza di array

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^+(t)], \quad (2.4)$$

dove \mathbf{R} , per la geometria lineare uniforme dell'array e per l'assunzione di fronti d'onda scorrelati, è una matrice di covarianza Hermitiana, definita positiva, Toeplitz e corrispondente al modello di fronti d'onda con completa coerenza spaziale.

Esaminando la (2.2a), è evidente che

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+ + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (2.5)$$

L'equazione precedente rappresenta il modello basato sulla matrice di covarianza dei dati. La \mathbf{S} è la matrice di covarianza $d \times d$ dei segnali trasmessi. La suddetta matrice, data l'assunzione di segnali scorrelati, sarà diagonale e con elementi pari alle potenze dei fronti d'onda. Il fatto che nella (2.5) il rumore appaia come una matrice diagonale segue da una serie di considerazioni. Per

definizione e nell'ipotesi di segnali incidenti e rumore non correlati, la matrice di covarianza $m \times m$ può essere scritta nel modo seguente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+ + \lambda\mathbf{R}_0, \quad (2.6)$$

Quando il numero di fronti d'onda incidenti d è minore del numero degli elementi dell'array m la matrice $\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+$ è singolare e quindi ha un rango minore di m . Perciò

$$|\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+| = |\mathbf{R} - \lambda\mathbf{R}_0| = 0. \quad (2.7)$$

La (2.7) è soddisfatta solo per λ uguale a uno degli autovalori di \mathbf{R} nella metrica di \mathbf{R}_0 . Ma per \mathbf{A} a rango pieno e \mathbf{S} definita positiva, $\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+$ deve essere definita non negativa. Perciò λ non può che essere l'autovalore minimo λ_{min} . Da quest'ultima relazione si deduce che qualsiasi matrice misurata $\mathbf{R} = E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^+(t)]$, può essere scritta

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+ + \lambda_{min}\mathbf{R}_0 \quad \lambda_{min} \geq 0, \quad (2.8)$$

con λ_{min} che rappresenta la soluzione più piccola di $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{R}_0| = 0$. Nel caso particolare di elementi del vettore rumore $\mathbf{n}(t)$ a media nulla e varianza σ^2 si avrà $\lambda_{min}\mathbf{R}_0 = \sigma^2\mathbf{I}$.

2.2.2 Interpretazione geometrica

In un linguaggio geometrico, il vettore delle misure \mathbf{R} può essere visualizzato come un elemento in uno spazio m -dimensionale.

Le colonne di \mathbf{A} , interpretate come vettori *directional mode* $a(\theta_j) = a_{ij}$ per $i = 1, 2, \dots, m$ possono essere rappresentate nel medesimo spazio.

L'equazione (2.2a) sta a significare che $\mathbf{r}(t)$ è una particolare combinazione lineare di *mode vectors*; gli elementi di $\mathbf{s}(t)$ sono i coefficienti della combinazione. Il vettore $\mathbf{r}(t)$ appartiene al sottospazio generato da \mathbf{A} . Ad esempio, se \mathbf{A} avesse due colonne, l'estensione dello spazio non potrà essere maggiore di un sottospazio bidimensionale e sia m che $\mathbf{r}(t)$ cadranno necessariamente in tale sottospazio. La Figura 2.1 ne facilita la visualizzazione. Si noti che, nel caso di sorgente di campo vicino e array tridimensionale, sono necessari tre parametri per definire la posizione di una sorgente: azimuth, elevazione e raggio. Il vettore $\mathbf{a}(\theta)$ a seconda della situazione può essere rappresentato come una retta (solo azimuth) oppure come un piano (azimuth/elevazione) nello spazio \mathbf{M} . Nella pratica, la procedura che consente di misurare o eventualmente definire $\mathbf{a}(\theta)$ consiste nella calibrazione dell'array. Ad ogni modo, per mantenere la discussione più semplice possibile, in seguito si farà esclusivamente riferimento ad onde planari e un parametro solo sconosciuto per sorgente. In Figura 2.1 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{min}$ sono gli autovettori di \mathbf{R} che corrispondono agli autovalori $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_{min} > 0$. Gli autovettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ generano il sottospazio del segnale (*signal subspace*) mentre \mathbf{e}_{min} è l'autovettore relativo al sottospazio del rumore (*noise subspace*). In termini geometrici, la determinazione delle direzioni d'arrivo di diversi fronti d'onda incidenti consiste nell'individuazione delle intersezioni fra il vettore continuo $\mathbf{a}(\theta)$ e lo spazio generato da \mathbf{A} (*range space*) ottenuto dai dati misurati. I mezzi per derivare il *range space* e la sua dimensione (numero d di segnali incidenti) sono ricavabili dall'algoritmo seguente.

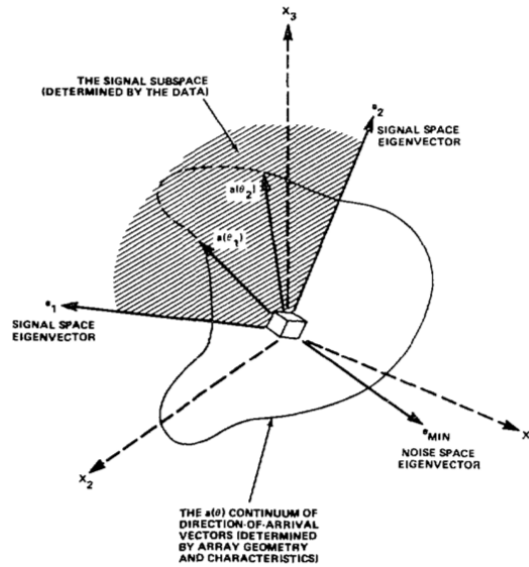


Figura 2.1: Descrizione geometrica.

2.3 Algoritmo

L'algoritmo MUSIC, come già osservato, fornisce asintoticamente ottime stime delle DOA e del numero dei fronti d'onda incidenti sull'array. La dichiarazione seguente è relativa ad una situazione di perfetta coerenza spaziale.

Siano $\{\lambda_1^{(\mathbf{R})} > \lambda_2^{(\mathbf{R})} > \dots > \lambda_m^{(\mathbf{R})}\}$ gli autovalori e $\{\mathbf{e}_1^{(\mathbf{R})}, \mathbf{e}_2^{(\mathbf{R})}, \dots, \mathbf{e}_m^{(\mathbf{R})}\}$ i corrispondenti autovettori di \mathbf{R} . Se \mathbf{S} non è singolare, segue:

1. L'autovalore minimo di \mathbf{R} è σ^2 con molteplicità $m - d$,

$$\lambda_{d+1}^{(\mathbf{R})}, \dots, \lambda_m^{(\mathbf{R})} = \sigma^2. \quad (2.9)$$

2. Gli autovettori che corrispondono agli autovalori minimi generano il cosiddetto sottospazio del rumore e sono ortogonali alle colonne della

matrice \mathbf{A} ,

$$\{\mathbf{e}_{d+1}^{(\mathbf{R})}, \mathbf{e}_{d+2}^{(\mathbf{R})}, \dots, \mathbf{e}_m^{(\mathbf{R})}\} \perp \{\mathbf{a}_{\theta_k}, \text{ per } k = 1, \dots, d\}. \quad (2.10)$$

La rappresentazione della forma Hermitiana inversa (2.11) che è funzione di θ , permette di determinare θ_k ,

$$\mathbf{H}_\theta^{(\mathbf{R})} = \left[\mathbf{a}_\theta^+ \mathbf{E}_n^{(\mathbf{R})} \mathbf{E}_n^{(\mathbf{R})} + \mathbf{a}_\theta \right]^{-1}. \quad (2.11)$$

Idealmente, $\mathbf{a}_\theta \perp \mathbf{E}_n^{(\mathbf{R})}$ per $\theta = \theta_k$ quindi $\mathbf{H}_\theta^{(\mathbf{R})}$ avrà i massimi proprio in corrispondenza di tali angoli e ciò permetterà di individuare le direzioni delle sorgenti. Ritornando alla (2.11), \mathbf{a}_θ è un vettore parametrizzato dalla direzione θ , $\mathbf{E}_n^{(\mathbf{R})}$ è una matrice $m \times m - d$ le cui colonne sono gli autovettori relativi agli $m - d$ autovalori minimi di \mathbf{R} . (Qualche volta la (2.11) è chiamata “pseudospettro” poichè indica la presenza di sinusoidi nel segnale studiato pur non essendo una vera densità spettrale di potenza.)

2.4 Implementazione del MUSIC

Nella pratica, la matrice di covarianza \mathbf{R} non è nota e deve essere stimata a partire dai dati misurati. La stima è ricavata dalle osservazioni $\mathbf{r}(t_j)$ al tempo t_j dei segnali ricevuti, lo stimatore a massima verosimiglianza della matrice di covarianza d'array è dato da:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{r}(t_j) \mathbf{r}(t_j)^+. \quad (2.12)$$

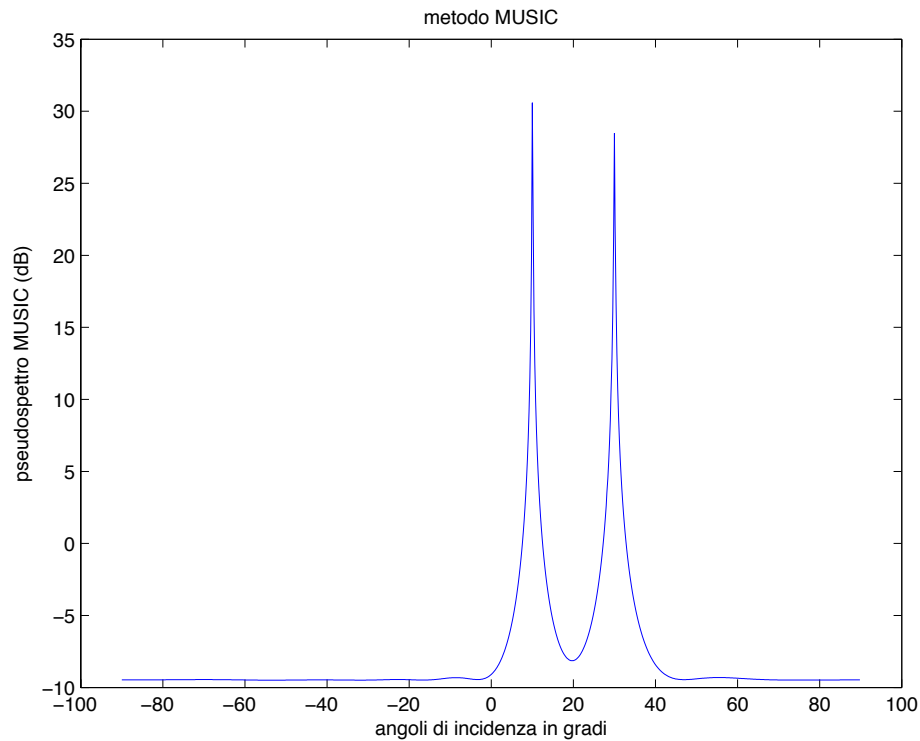


Figura 2.2: algoritmo MUSIC-trasmissione di due segnali ortogonali che sono ricevuti a $[10^\circ, 30^\circ]$, SNR $[10\ 10]$ dB, 500 campioni

La (2.12) è la matrice di covarianza campionata, se i camponi misurati appartengono ad una distribuzione gaussiana questa stima converge asintoticamente alla matrice di covarianza reale. Nella simulazione svolta in ambito della tesi è stato implementato, con l'ausilio di MATLAB, il MUSIC considerando la trasmissione di due segnali sinusoidali alla frequenza di 3 GHz . Le sinusoidi hanno entrambe potenza pari a 0 dBW e i loro fronti d'onda scorrelati giungono rispettivamente con angoli di 10° e 30° rispetto all'array di sensori. Sul

segnale complessivo è presente un rumore additivo, Gaussiano e bianco che è 10 *dB* al di sotto del livello di potenza del segnale. L'array è composto da nove trasduttori distanti 5 *cm* l'uno dall'altro. Il numero di campioni usati per stimare la matrice di covarianza è pari a 500, è naturale che l'aumento di questo valore comporta un miglioramento delle prestazioni dell'algoritmo.

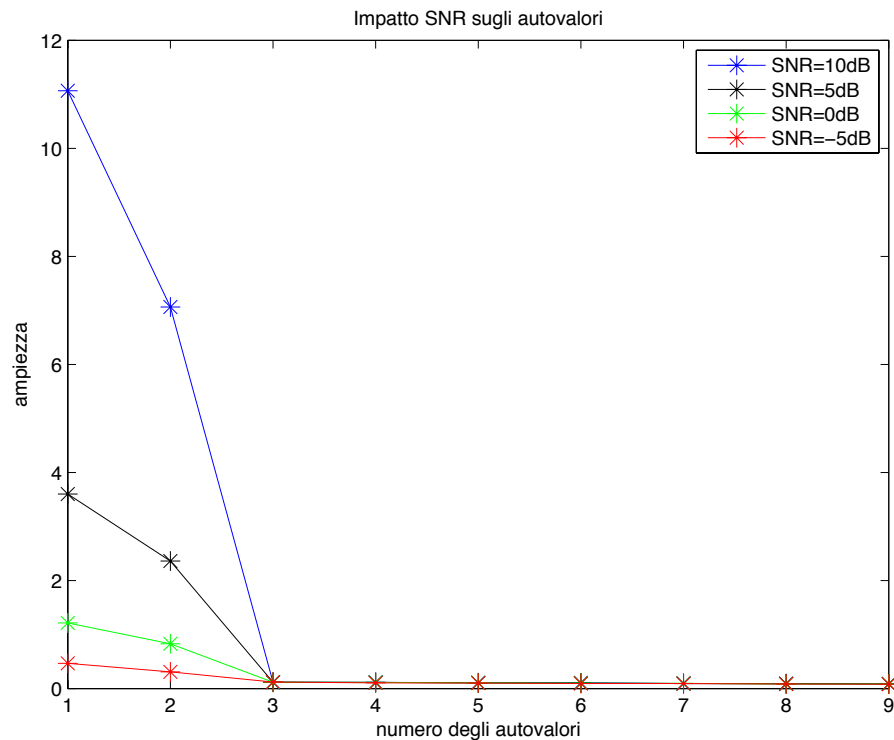


Figura 2.3: Comportamento degli autovalori al variare dell'SNR

Il calcolo degli autovalori della matrice \mathbf{R} è stato effettuato attraverso la decomposizione ai valori singolari (o SVD, *Singular Value Decomposition*) della matrice di covarianza d'array, il risultato è del tutto analogo a quello ottenibile

utilizzando la decomposizione agli autovalori. La scelta della metodologia per ricavare autovalori e autovettori è stata dettata dalla possibilità di usufruire di una matrice diagonale, contenente gli autovalori, che fosse ordinata in senso decrescente e questo ha permesso di mettere maggiormente in evidenza gli autovalori relativi alle due sorgenti rispetto a quelli (prossimi a zero) che caratterizzano il rumore. Dalla Figura 2.3 si nota come per bassi SNR l'algoritmo smetta di funzionare infatti tutti gli autovalori sono prossimi a zero e scompaiono i due autovalori massimi relativi alle due sorgenti. In pratica il segnale è completamente coperto dal rumore e con un $SNR = -5dB$ ad esempio non si riesce più ad estrarre il segnale dal rumore.

Capitolo 3

Stima DOA in parziale coerenza spaziale

3.1 Presenza di errori nel modello

I metodi delle auto-strutture, come tutte le tecniche “*model-based*” presentano una forte sensibilità rispetto agli errori che si verificano quando vengono meno le assunzioni su segnale e caratteristiche dell’array. La perdita della coerenza spaziale nei fronti d’onda ricevuti, ad esempio, si traduce immediatamente in un peggioramento delle prestazioni di questa tipologia di algoritmi. In MUSIC si assume che i fronti d’onda misurati godano di perfetta coerenza spaziale, ossia esista una relazione di fase fissa fra i valori del campo sui vari sensori dell’array. In situazioni reali, la propagazione in mezzi *tempo-varianti*(refrattivi) o superfici di scattering che variano in maniera aleatoria nel tempo, comporta la perdita di questa coerenza. La decorrelazione spaziale causa una stima

non corretta dell'angolo di arrivo. Di seguito verrà sviluppato un modello matematico che tenga conto della decorrelazione spaziale e si analizzerà il miglioramento delle prestazioni nel MUSIC. La nuova formulazione del problema sarà realizzata ipotizzando che la coerenza sia isotropica ossia che la perdita di coerenza spaziale lungo l'array sia la stessa per tutti i fronti d'onda in modo indipendente dalla loro direzione d'arrivo e questa assunzione è ragionevole in diverse situazioni reali (ad esempio sonar).

3.2 Formulazione del problema

Le assunzioni circa l'array e le sorgenti fatte in 2.2.1 sono ancora valide. Nel nuovo modello si terrà conto dei cambiamenti sui fronti d'onda dovuti alla propagazione in mezzi *tempo-varianti* che in questo modo giungono sull'array con ridotta coerenza spaziale. La perturbazione spaziale può essere rappresentata come un processo di rumore moltiplicativo indipendente dal fronte d'onda. In ogni sensore, oltre al rumore additivo rappresentato come un processo aleatorio stazionario a valor medio nullo e indipendente da sensore a sensore, sarà presente anche questo nuovo contributo di disturbo aleatorio. Il segnale ricevuto dal sensore i -esimo $p_i(t)$ ora è dato da:

$$p_i(t) = \sum_{k=1}^d \psi_{ik}(t) e^{j\phi_{ik}(t)} s_k(t) e^{-j\omega_0(i-1)\Delta \sin \theta_k/c} + n_i(t) \quad (3.1)$$

in cui oltre ai termini visti precedentemente (2.2.1), compaiono $\psi_{ik}(\cdot)$ e $\phi_{ik}(\cdot)$ che rappresentano rispettivamente l'ampiezza e la fase del k -esimo fronte d'onda sul sensore i , relativamente a quella sul primo sensore. La perturbazione spaziale del k -esimo fronte d'onda viene modellata come un processo aleatorio

complesso spazio-temporale e stazionario rappresentato da:

$$g_{ik}(t) = \psi_{ik}(t)e^{j\phi_{ik}(t)}$$

si assume inoltre che $\phi_{ik}(t)$ sia a valor medio nullo e che $g_{ik}(t)$, $k = 1, \dots, d$ siano processi indipendenti e identicamente distribuiti¹. Il coefficiente di correlazione di $g_{ik}(t)$ e $g_{jk}(t)$ è dato da b_{ij} ed è denominato *funzione di coerenza spaziale*:

$$b_{ij} = \frac{E[g_{ik}(t)g_{jk}^*(t)]}{\sqrt{E[|g_{ik}(t)|^2]E[|g_{jk}(t)|^2]}} \quad (3.2)$$

Come si può osservare b_{ij} è indipendente dall'indice k e anche dal tempo ed è, per ϕ_{ij} a valor medio nullo, reale. Quindi nonostante la perdita di coerenza spaziale, i fronti d'onda conservano sia la loro struttura planare che la direzione. Per l'ipotesi di coerenza isotropica, b_{ij} dipende solamente dalla spaziatura fra i sensori i -esimo e j -esimo quindi per un array lineare uniforme $b_{ij} = b_{i-j}$. Modellando il termine $\phi_{ij}(t)$ come un processo indipendente dall'incremento spaziale fra i sensori si ottiene una funzione di coerenza spaziale che decresce come $|i - j|$. Inoltre ponendo $\psi_{ik}(t) \equiv 1$ e la varianza dell'incremento di fase fra i sensori pari a σ_ϕ^2 si deriva che:

$$b_{ij} = e^{-\sigma_\phi^2|i-j|/2}. \quad (3.3)$$

L'equazione (3.3) è il modello di un fronte d'onda la cui ampiezza rimane costante mentre la fase varia aleatoriamente fra i sensori. Di seguito la (3.1) in forma matriciale.

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{G}(t) \circ \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.4a)$$

¹ $E[g_{ik}(t)g_{il}^*(t)] = 0$ per $k \neq l$.

in cui $\mathbf{p}(t)$ è, come già osservato per $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{n}(t)$, un vettore $m \times 1$,

$$\mathbf{p}^T(t) = [p_1(t) \cdots p_m(t)], \quad (3.4b)$$

e $\mathbf{G}(t)$ è la matrice $m \times d$ delle perturbazioni del fronte d'onda, così definita:

$$[\mathbf{G}(t)]_{ik} = g_{ik}(t). \quad (3.4c)$$

Il simbolo \circ indica il prodotto matriciale elemento per elemento (Schur-Hadamard).

La covarianza d'array, corrispondente al modello di parziale coerenza spaziale, è ottenuta calcolando il valore atteso del prodotto di $\mathbf{p}(t)$ per il suo trasposto coniugato.

$$\mathbf{P} = E[\mathbf{p}(t)\mathbf{p}^+(t)], \quad (3.5)$$

Per rumori sui sensori additivi, perturbazioni aleatorie del fronte d'onda e segnali sorgente mutuamente scorrelati, a partire da (3.1) si può mostrare che

$$[\mathbf{P}]_{ij} = b_{ij}[\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+]_{ij} + \delta_{ij}\sigma^2, \quad (3.6)$$

con $\delta_{ij} = 0, i \neq j$, e $\delta_{ij} = 1, i = j$.

Per definizione $b_{ij} = 1$, la (3.6) può essere riscritta come

$$\mathbf{P} = \mathbf{B} \circ \{\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^+\} + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{B} \circ \mathbf{R}, \quad (3.7)$$

con \mathbf{B} data da

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_{ij}] = [\mathbf{b}_{i-j}]. \quad (3.8)$$

Dall'espressione (3.8) si deduce che la \mathbf{B} è simmetrica, Toeplitz e definita positiva. Infatti, osservando la (3.1) e la (3.2), la \mathbf{B} può essere considerata come la covarianza d'array di un singolo fronte d'onda che giunge sull'array

con parziale coerenza spaziale e con potenza unitaria.

Dal momento che sia \mathbf{B} che \mathbf{R} sono definite positive, la stessa cosa varrà anche per il loro prodotto $\mathbf{B} \circ \mathbf{R}$. Esaminando la (3.7) si trova che la covarianza di array in presenza di una parziale coerenza spaziale è semplicemente data dal prodotto fra le matrici \mathbf{B} e \mathbf{R} . La matrice \mathbf{B} ha in generale rango pieno quindi ogni fronte d'onda dà un contributo a rango pieno alla matrice \mathbf{P} .

Le considerazioni fatte, terminano la definizione del modello sotto analisi. Date le seguenti ipotesi:

- modelli dei segnali dati da (3.1)–(2.2a)
- misure $\{\mathbf{p}(t_j), j = 1, 2, \dots, N\}$ note
- matrice di coerenza spaziale \mathbf{B} nota

il problema consisterà nel determinare le DOAs $\{\theta_k, k = 1, \dots, d\}$.

Di seguito, prima dell'introduzione di una nuova metodologia di stima, verranno valutate le implicazioni legate all'utilizzo dell'algoritmo MUSIC in presenza di parziale coerenza.

3.3 MUSIC con decorrelazione spaziale

La matrice di covarianza di array, in presenza di fronti d'onda non perfettamente coerenti, è $\mathbf{P} = \mathbf{B} \circ \mathbf{R}$. In tale circostanza l'algoritmo MUSIC verrà applicato sulla matrice \mathbf{P} invece della \mathbf{R} . Siano $\{\lambda_1^{(\mathbf{P})} > \lambda^{(\mathbf{P})} > \dots > \lambda_m^{(\mathbf{P})}\}$ e $\{\mathbf{e}_1^{(\mathbf{P})}, \mathbf{e}_2^{(\mathbf{P})}, \dots, \mathbf{e}_m^{(\mathbf{P})}\}$ gli autovalori e gli autovettori di \mathbf{P} , per valutare in che misura MUSIC risenta dell'assenza di perfetta coerenza spaziale, è utile

relazionare le autodecomposizioni di \mathbf{P} e \mathbf{R} . Come descritto accuratamente nell'appendice A di [1], nel caso di una singola sorgente si ha la seguente relazione fra gli autovalori di \mathbf{P}, \mathbf{B} e \mathbf{R}

$$\lambda_i^{(\mathbf{B} \circ \mathbf{R})} = (1/m)(\lambda_{max}^{\mathbf{R}} - \lambda_{min}^{\mathbf{R}})\lambda_i^{\mathbf{B}} + \lambda_{min}^{\mathbf{R}}, \quad (3.9)$$

dove $\{\lambda_1^{(\mathbf{B})} > \lambda_2^{(\mathbf{B})} > \dots > \lambda_m^{(\mathbf{B})}\}$ rappresentano gli autovalori di \mathbf{B} . In generale, quando $m > d > 1$, gli autovalori di \mathbf{P} presentano i seguenti limiti [1]

$$\sigma^2 + \sigma_1^2 \lambda_i^{(\mathbf{B})} + \sum_{k=2}^d \lambda_{min}^{(\mathbf{B})} \leq \lambda_{min}^{(\mathbf{B} \circ \mathbf{R})} \leq \sum_{k=2}^{d-1} \lambda_{max}^{(\mathbf{B})} + \sigma_d^2 \lambda_i^{(\mathbf{B})} + \sigma^2, \quad (3.10)$$

in cui σ_i^2 sono le potenze dei segnali sorgente o equivalentemente gli autovalori di \mathbf{S} .

La \mathbf{B} , come già osservato, è una matrice di covarianza d'array a rango pieno e in generale con un insieme pieno di autovalori distinti. Dalle (3.9) e (3.10) si nota come anche la matrice \mathbf{P} abbia un insieme completo di autovalori distinti. L'autovalore minimo di \mathbf{R} con molteplicità $m - d$ è una proprietà che non vale per \mathbf{P} . In presenza di decorrelazione spaziale, non sarà più possibile ottenere una stima del numero delle sorgenti che sfrutti la molteplicità dell'autovalore minimo. Di certo anche con perfetta coerenza, gli autovalori della matrice di covarianza campionata non avranno la desiderata molteplicità dell'autovalore minimo. Test statistici, come i metodi di teoria dell'informazione basati sul criterio delle descrizione a lunghezza minima (*Minimum Description Length*), sono necessari per stimare il numero delle sorgenti. Il criterio **MDL** come noto, porta in modo asintotico a stime consistenti nel caso di coerenza spaziale. Simulazioni al computer che impiegano i test di *Wax-Kailath* sulla covarianza \mathbf{P} , hanno mostrato una sovrastima del numero delle sorgenti. Infatti per bassa

coerenza spaziale, i test **MDL** mostrano una stima maggiorata del numero delle sorgenti ($m - 1$).

Per analizzare l'impatto della decorrelazione sulla stima **DOA** si deve valutare in che misura il sottospazio del segnale ideale venga perturbato in questa situazione. In appendice B di [1] è dimostrato che, per $d = 1$, gli autovettori di **P**, **R** e **B** sono legati dalla seguente relazione:

$$\mathbf{e}_i^{(\mathbf{P})} = \mathbf{e}_i^{(\mathbf{R})} \circ \mathbf{e}_i^{(\mathbf{B})} \quad (3.11)$$

La matrice **B** essendo reale e simmetrica avrà autovalori reali. La stessa cosa non varrà per **P** e **R** poichè i loro autovettori sono in generale complessi. La decorrelazione spaziale, in questo caso, modifica semplicemente l'ampiezza delle componenti degli autovettori ma non la loro fase. Le stime DOA nel MUSIC presentano una sensibilità minima ai cambiamenti in ampiezza delle componenti degli autovettori dal momento che risentono in misura maggiore delle variazioni di fase. Per $d > 1$ il legame fra gli autovalori (3.11) non è così banale. Simulazioni informatiche hanno evidenziato come, impiegando array di otto elementi distanziati di $\lambda/2$, una modesta perdita di coerenza spaziale (1dB) attraverso l'array origina una leggera degradazione nelle stime DOA o in risoluzione. Perdite di coerenza maggiori naturalmente causeranno difficoltà più alte. Considerando la ricezione sull'array di due segnali sinusoidali è interessante osservare l'impatto della decorrelazione spaziale sulla stima del numero delle sorgenti. Per bassi valori di σ_ϕ^2 sono ben evidenti gli autovalori relativi alle due sorgenti; se il mezzo propagativo è causa di un'elevata decorrelazione spaziale incominciano a diventare significativi anche altri autovalori. L'utilizzo del MUSIC in tale situazione dà luogo ad una sovrastima del

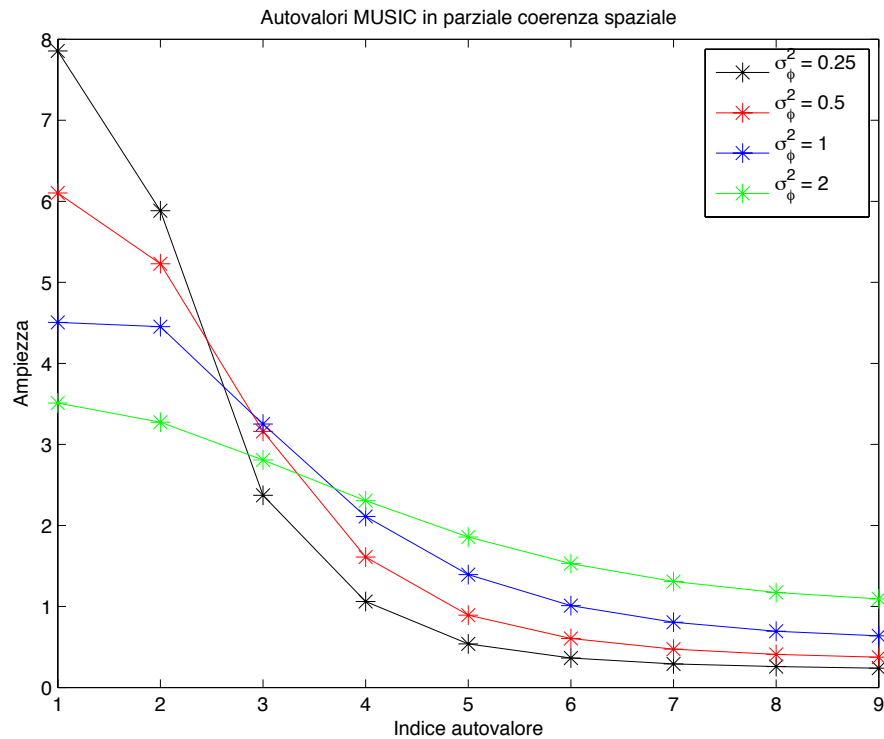


Figura 3.1: Ampiezze degli autovalori al crescere della varianza dell'incremento di fase fra i sensori dell'array

numero delle sorgenti.

3.4 Metodo di Paulraj-Kailath

Per migliorare l'algoritmo MUSIC in situazioni di imperfetta coerenza spaziale e di conoscenza *a priori* della matrice \mathbf{B} , Paulraj e Kailath [1] hanno introdotto e sfruttato il cosiddetto ripristino della matrice di covarianza d'array. Il metodo

consiste nel determinare \mathbf{R} a partire da \mathbf{P} nel modo che segue:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C} \circ \mathbf{P} \quad (3.12)$$

con \mathbf{C} che è l'inversa elemento per elemento di \mathbf{B} ,

$$\mathbf{C} = [b_{ij}^{-1}], \quad b_{ij} \neq 0. \quad (3.13)$$

Negli array reali i b_{ij} non si avvicinano mai a zero quindi $[\mathbf{C}]_{ij}$ non assumerà mai valori elevati. L'inversa di *Schur-Hadamard* $\{\mathbf{C} \circ\}$ abbassa il contributo a rango pieno dato da ogni sorgente ad un componente a rango unitario. La matrice \mathbf{R} derivata da questa trasformazione può a questo punto essere elaborata come nel MUSIC standard. L'equazione (3.12) rappresenta una soluzione semplice del problema in decorrelazione spaziale fintanto che si hanno a disposizione ottime stime della \mathbf{P} . Per valutazioni di \mathbf{P} non molto accurate l'operatore di *Schur-Hadamard* dà luogo ad un peggioramento delle prestazioni di MUSIC. Il compromesso ottenibile è riassunto di seguito. Ipotizzando che \mathbf{P} venga così stimato:

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{p}(t_j) \mathbf{p}(t_j)^+. \quad (3.14)$$

Utilizzando le (3.1)-(3.4) è possibile avere la matrice di covarianza campionata come:

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{B} + \Psi^b \circ (\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^+) + \sigma^2 \mathbf{I} + \Psi^n, \quad (3.15)$$

dove

$$[\Psi^b] = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N g_{ik}(t_j) g_{jk}^*(t_l) - [\mathbf{B}]_{ij} \quad (3.16)$$

è l'errore nella stima di \mathbf{B} causato dall'utilizzo di un numero finito (N) di campioni per la stima,

$$\widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{s}(t_j) \mathbf{s}(t_j)^+. \quad (3.17)$$

è la matrice di covarianza del segnale calcolata con un numero finito di realizzazioni e, infine,

$$\Psi^n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{n}(t_j) \mathbf{n}(t_j)^+ - \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.18)$$

costituisce l'errore nella valutazione della matrice di correlazione del rumore. La (3.15) può essere riscritta in tale maniera:

$$\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{B} \circ \overline{\mathbf{R}} + \Psi^b \circ (\mathbf{A} \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^+) + \Psi^n, \quad (3.19)$$

in cui

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{A} \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^+ + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.20)$$

è tale che, se $N \geq d$ il sottospazio del segnale (generato dagli autovettori corrispondenti agli autovalori non minimi) di $\overline{\mathbf{R}}$ e \mathbf{R} , anche se con autovalori non identici, originano le stesse stime.

Seguendo il procedimento suggerito in (3.12), è possibile moltiplicare $\widehat{\mathbf{P}}$ per $\mathbf{C} \circ$ ed estrarre $\widetilde{\mathbf{R}}$, una stima di $\overline{\mathbf{R}}$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{C} \circ \widehat{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{R}} + \mathbf{C} \circ \{\Psi^b \circ (\mathbf{A} \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^+) - \Psi^n\} \quad (3.21)$$

Sulla (3.21), per ottenere il numero delle sorgenti e le DOA, possono essere applicati sia i test di *Wax-Kailath* che il MUSIC. Le stime prodotte a causa del termine perturbativo $\mathbf{C} \circ \{\Psi^b \circ (\mathbf{A} \widehat{\mathbf{S}} \mathbf{A}^+) - \Psi^n\}$ non saranno esatte; si nota tuttavia che l'espressione precedente tende a zero per N molto grande.

Per il teorema di *Wielandt-Hoffman* è noto che i quadrati delle perturbazioni

degli autovalori di una matrice simmetrica sono limitati superiormente dalla *norma di Frobenius* della matrice di perturbazione ($\|\mathbf{C} \circ \{\Psi^b \circ (\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{A}}^+) - \Psi^n\}\|_{\mathbf{F}}$). Basanbosi sulla dimostrazione di *Stewart*(1973):

La sensibilità dei sottospazi invarianti alle perturbazioni matriciali è legata alla dispersione degli autovalori della matrice originale e gli errori di stima del sottospazio sono proporzionali alla norma delle perturbazioni.

La *norma di Frobenius* della matrice di perturbazione può quindi essere considerata come una misura della degradazione attesa nelle stime del numero di sorgenti e delle loro direzioni d'arrivo.

3.4.1 Confronto MUSIC metodo Paulraj-Kailath

Il raffronto fra i due metodi parte comparando le prestazioni di stima del metodo di Paulraj-Kailath in parziale coerenza con il MUSIC in perfetta coerenza spaziale. Sia $\widehat{\mathbf{R}}$ la covarianza campionata in perfetta coerenza spaziale. Segue che:

$$\widehat{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}} + \Psi^n. \quad (3.22)$$

Nel caso asintotico $N \rightarrow \infty$, $\widehat{\mathbf{P}}$ e $\widehat{\mathbf{R}}$ convergeranno a \mathbf{R} e in entrambi i casi si avranno stime esatte. Per un numero di campioni finito, invece, dalle (3.21) e (3.22) si trova che $\widehat{\mathbf{R}}$ rispetto a $\widehat{\mathbf{P}}$ non è una buona stima di $\overline{\mathbf{R}}$ (o equivalentemente di \mathbf{R}). I motivi per cui si ha questo sono essenzialmente due:

1. Esiste un termine di errore aggiuntivo $\mathbf{C} \circ \{\Psi^b \circ \{\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{S}}\widehat{\mathbf{A}}^+\}$ associato alle perturbazioni (spaziali) aleatorie dei fronti d'onda.

2. Essendo $\mathbf{C}_{ij} > 1$ per $i \neq j$, per il prodotto con $\{\mathbf{C} \circ\}$, si ha un'amplificazione della perturbazione del rumore Ψ^n .

E' chiaro che, in presenza di decorrelazione spaziale, sono necessari un numero maggiore di campioni per ottenere prestazioni comparabili con quelle possibili in perfetta coerenza.

Il confronto è legato alla valutazione del giusto compromesso tra l'utilizzo dell'algoritmo modificato, con conseguente incremento del rumore, e l'impiego dell'algoritmo classico. Tale comparazione è agevole scrivendo la (3.19) come:

$$\hat{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{R}} + (\mathbf{B} - \mathbf{I}) \circ \bar{\mathbf{R}} + \Psi^b \circ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{A}^+) + \Psi^n. \quad (3.23)$$

Il compromesso si riduce ad un parallelo tra la perturbazione nel metodo di *Paulraj-Kailath* ($\mathbf{C} \circ (\Psi^b \circ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{A}^+) - \Psi^n)$) e quella nel MUSIC ($(\mathbf{B} - \mathbf{I}) \circ \bar{\mathbf{R}} + \Psi^b \circ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{A}^+) + \Psi^n$). Si evidenzia che, in assenza di distorsione spaziale, i disturbi sono identici. Le simulazioni effettuate in [1] hanno mostrato come, l'algoritmo modificato sia superiore, in termini di stime DOA, quando il numero di campioni e il livello di rumore sono tali che, le perturbazioni sono almeno 30 dB sotto \mathbf{R} (nella norma di Frobenius). Per quanto concerne la rilevazione del numero delle sorgenti, l'uso dell'operatore $\{\mathbf{C} \circ\}$ comporta sempre un miglioramento della stima. Tuttavia, come ci si aspetterebbe, i risultati sono peggiori di quelli ottenibili nel caso di perfetta coerenza. La conclusione è che l'impiego dell'operatore inverso di Schur-Hadamard è sempre raccomandato per il calcolo del numero delle sorgenti mentre per le stime DOA solo se si hanno a disposizione numerosi campioni e livelli di rumore molto bassi. Uno dei principali svantaggi del criterio di *Paulraj-Kailath* è il requisito di conoscenza *a priori* della matrice di coerenza spaziale \mathbf{B} . Nella pratica que-

sta è condizione non realistica. Una conoscenza imprecisa di \mathbf{B} provoca seri problemi, soprattutto quando alcuni elementi della matrice sono prossimi a zero.

3.4.2 Applicazione Paulraj-Kailath al *root* MUSIC

Il *root*-MUSIC appartiene sempre alla classe delle tecniche MBPE (*model-based parameter estimation*), è una variante dello stimatore MUSIC e consente di determinare le DOA come le fasi angolari dei d zeri (posizionati a coppie reciproche) dell'equazione

$$\mathbf{a}(z^{-1})^+ \mathbf{E}_n^{(\mathbf{R})} \mathbf{E}_n^{(\mathbf{R})+} \mathbf{a}(z) = 0. \quad (3.24)$$

che risultano vicini al cerchio di raggio unitario. Nella (3.24) $\mathbf{a}(z)$ rappresenta il vettore \mathbf{a}_θ della (2.11) con z al posto di $e^{j\omega_0(\delta/c)\sin\theta}$ ovvero

$$\mathbf{a}(z) = [1, z^{-1}, \dots, z^{-(m-1)}]^T.$$

La tabella seguente è stata ottenuta considerando un array di otto elementi distanti metà della lunghezza d'onda. I segnali sono tre fronti d'onda indipendenti, alla stessa potenza (0 *dBW*) e che giungono rispettivamente da -50° , 20° e 60° . I sensori sono soggetti ad un rumore additivo che è 10 *dB* sotto il livello del segnale.

I valori ottenuti nelle ultime tre colonne di Tabella 3.1 sono relativi al caso in cui la decorrelazione spaziale, corrispondente al modello (3.3), introduce 2.60 *dB* ($\sigma_\phi^2 = 0.6$) di perdita di coerenza per ogni lunghezza d'onda percorsa. La matrice di covarianza campionata è stata stimata immagazzinando 1000

θ_k	MUSIC	MUSIC(low coh)	Paulraj-Kailath	Paulraj-Kailath(err)
-50	-49.9369	-50.7313	-49.9369	-51.7204
20	20.0242	20.2443	20.0242	24.8099
60	59.8297	60.3443	59.8297	62.9515
RMSE	0.1058	0.4875	0.1058	3.4062

Tabella 3.1: Valori delle radici degli errori quadratici medi(RMSE Root Mean Square Error)

campioni. Il metodo delle autostrutture modificato(Paulraj-Kailath esatto) come si può notare presenta lo stesso errore di stima che si ottiene con il MUSIC standard(perfetta coerenza) e quindi migliore di quello che si ha processando la matrice di covarianza d'array \mathbf{P} invece che \mathbf{R} (terza colonna di Tabella 3.1). Una conoscenza non perfetta della matrice \mathbf{B} provoca un aumento dell'RMSE che è uno dei limiti maggiori della tecnica proposta da Paulraj e Kailath. In pratica, aumentando il valore della varianza degli incrementi di fase fra i sensori dell'array, i coefficienti della matrice \mathbf{B} diventano prossimi a zero($\mathbf{C} = [b_{ij}^{-1}]$ molto grandi) causando un elevato aumento del termine perturbativo($\mathbf{C} \circ \{\Psi^b \circ (\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{S}\mathbf{A}^+) - \Psi^n\}$) e un conseguente peggioramento delle prestazioni.

Capitolo 4

Time reversal: Analisi della convergenza

4.1 Operatore di Time reversal

Il principio del processo di time reversal iterativo è stato fornito nel primo capitolo. Allo scopo di descriverlo teoricamente, di seguito verrà data una semplice formulazione dell'operazione di trasmissione e ricezione realizzata con un'array di trasduttori reversibili. L'idea è scrivere in modo generale i segnali ricevuti in funzione di quelli trasmessi. Il sistema sotto analisi è formato da un'array di L ricetrasmittitori che sondano un mezzo con diversi scatteratori e si ipotizza che, nella sua globalità, sia approssimabile come un sistema lineare e tempo-invariante. In altre parole, si assume che il comportamento dei sensori sia lineare, che le onde obbediscano alle leggi dell'acustica lineare e che il mezzo di propagazione sia stabile.

4.1.1 La matrice di trasferimento

Per esprimere i segnali ricevuti in funzione di quelli trasmessi, si definisce una risposta inter-elemento che include al suo interno sia tutti gli effetti propagativi del mezzo sotto analisi che le risposte acusto-elettriche dei due elementi. La risposta impulsiva inter-elemento $\mathbf{k}_{lm}(t)$ dal sensore l a quello m corrisponde al segnale ricevuto sul canale l -esimo dopo aver applicato una funzione *delta di Dirac* sul canale numero m . Ipotizzando trasformazioni lineari e tempo-invarianti, le \mathbf{L}^2 funzioni temporali $\mathbf{k}_{lm}(t)$ per $1 \leq l \leq \mathbf{L}$ e $1 \leq m \leq \mathbf{L}$ permettono la descrizione di qualsiasi operazione di rice-trasmissione. Infatti, siano $\mathbf{e}_m(t)$, $1 \leq m \leq \mathbf{L}$, gli \mathbf{L} segnali di input, i segnali di output $\mathbf{r}_l(t)$, $1 \leq l \leq \mathbf{L}$ sono dati da

$$\mathbf{r}_l(t) = \sum_{m=1}^{\mathbf{L}} \mathbf{k}_{lm}(t) \otimes \mathbf{e}_m(t), \quad 1 \leq l \leq \mathbf{L}. \quad (4.1)$$

Applicando la trasformata di Fourier:

$$\mathbf{R}_l(\omega) = \sum_{m=1}^{\mathbf{L}} \mathbf{K}_{lm}(\omega) \otimes \mathbf{E}_m(\omega), \quad 1 \leq l \leq \mathbf{L}. \quad (4.2)$$

La (4.2) è semplificata usando la seguente notazione matriciale

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{E}(\omega), \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1M} \\ K_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{L1} & K_{L2} & \cdots & K_{LM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix}$$

In cui $\mathbf{E}(\omega)$ e $\mathbf{R}(\omega)$ sono rispettivamente i vettori dei segnali trasmessi e di quelli ricevuti (segnali di input e di output) e $\mathbf{K}(\omega)$ è la matrice di trasferimento di dimensione pari al numero dei trasduttori. In accordo con il principio di reciprocità (una sorgente e un osservatore possono essere scambiati senza che questo alteri il segnale misurato) la risposta impulsiva inter-elemento dall'elemento numero m a quello l -esimo è equivalente a quella da l a m ($K_{lm} = K_{ml}$). In altre parole la matrice \mathbf{K} è simmetrica.

4.1.2 Modello matematico del TR iterativo

Il processo di *time reversal* può essere descritto ad una frequenza fissata perciò il termine (ω) verrà di seguito omissso. Sia \mathbf{E}^0 il vettore di input iniziale, il segnale di output risultante sarà $\mathbf{R}^0 = \mathbf{K}\mathbf{E}^0$. L'operazione di *time reversal* è equivalente ad una coniugazione di fase nel dominio della frequenza quindi il nuovo segnale di input \mathbf{E}^1 è il precedente segnale di output \mathbf{R}^0 con fase coniugata

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{K}^* \mathbf{E}^{0*}.$$

Il segnale risultante è

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{K}\mathbf{K}^* \mathbf{E}^{0*}.$$

Allo stesso modo, i segnali di input per la terza e quarta iterazione sono

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{K}^* \mathbf{E}^{1*} = \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{E}^0,$$

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{K}^* \mathbf{E}^{0*}.$$

La generalizzazione delle formule precedenti è molto intuitiva, i segnali di ingresso per le iterazione $2n$ e $2n + 1$ sono

$$\mathbf{E}^{2n} = [\mathbf{K}^*\mathbf{K}]^n \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{E}^{2n+1} = [\mathbf{K}^*\mathbf{K}]^n \mathbf{K}^* \mathbf{E}^{0*}. \quad (4.4)$$

Il risultato del processo iterativo dipende dall'operatore $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$, denominato operatore di *time-reversal*.

Il comportamento di $[\mathbf{K}^*\mathbf{K}]^n$ dipende dagli autovalori di $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$, perciò è importante determinare se la matrice $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ può essere diagonalizzata. La simmetria di \mathbf{K} implica che l'operatore $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ è hermitiano. In accordo con la teoria degli operatori hermitiani, $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ può essere diagonalizzato, i suoi autovettori sono ortogonali e i suoi autovalori sono reali. Inoltre gli autovalori sono positivi infatti sia λ un autovalore di $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ e \mathbf{V} un autovettore associato, per la simmetria di \mathbf{K} si ha

$$\|\mathbf{K}\mathbf{V}\|^2 = \mathbf{V}^+ \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{V}^+ \lambda \mathbf{V} = \lambda \|\mathbf{V}\|^2.$$

Queste equazioni implicano che λ è positivo. Siano $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p$ differenti autospazi associati agli autovalori distinti $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ di $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$, in presenza di autovalori degeneri p potrebbe essere minore del numero L di trasduttori dell'array. Se un segnale di input è un autovettore dell'operatore di *time reversal*, allora sarà un invariante rispetto alla trasformazione di *time reversal*: il segnale ricevuto dopo un'inversione temporale è proporzionale al coniugato di fase del primo input. La scomposizione dell'operatore di *time reversal*, come illustrato nel paragrafo successivo, è fortemente collegata alle proprietà degli scatterer presenti nel mezzo. Il primo invariante che può essere determinato sperimentalmente è l'autovettore del più grande autovalore λ_i . Scrivendo il primo vettore di input \mathbf{E}^0 come somma di vettori degli autospazi

si ottiene:

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_p, \quad \mathbf{F}_i \in \mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq L. \quad (4.5)$$

Dopo $2n$ iterazioni del processo, il nuovo segnale di input è

$$\mathbf{E}^{2n} = \lambda_1^n \mathbf{F}_1 + \lambda_2^n \mathbf{F}_2 + \cdots + \lambda_p^n \mathbf{F}_p. \quad (4.6)$$

Se $\mathbf{F}_1 \neq 0$ allora per n molto grande

$$\mathbf{E}^{2n} \approx \lambda_1^n \mathbf{F}_1. \quad (4.7)$$

In presenza di target ben risolti, l'autovettore \mathcal{F}_1 corrisponde alla focalizzazione sul più riflettivo.

4.1.3 Operatore *time-reversal* per scatterer puntiformi

I bersagli puntiformi hanno dimensioni ridotte rispetto alla lunghezza d'onda e una risposta sferica al campo pressione. In mezzi di propagazione contenenti solo scatteratori puntiformi, la matrice di trasferimento può essere scritta come prodotto di tre matrici e ognuna associata ad una fase diversa:

- **Forward propagation:** una matrice di propagazione che descrive la trasmissione e la propagazione dai trasduttori ai target.
- **Diffusion:** matrice di scattering che, in presenza di un singolo processo di scattering, è diagonale.
- **Inverse propagation:** matrice di contropropagazione.

Nell'analisi seguente si assume che l'array di trasduttori abbia L elementi simili e che il mezzo contenga d scatteratori puntiformi con coefficienti di riflettività complessi e dipendenti dalla frequenza $C_1(\omega), C_2(\omega), \dots, C_d(\omega)$.

Sia $h_{il}(t)$ la risposta impulsiva in presenza di diffrazione fra il trasduttore l e il riflettore i -esimo, $a_e(t)$ e $a_r(t)$ le risposte acusto-elettriche in trasmissione e ricezione, con trasformate di Fourier $A_e(\omega)$ e $A_r(\omega)$, se il segnale di input ad ogni elemento l è $e_l(t)$, allora la pressione sullo scatterer i è:

$$p_i(t) = \sum_{l=1}^L h_{il}(t) \otimes a_e(t) \otimes e_l(t). \quad (4.8)$$

Riscritta nel dominio della frequenza

$$P_i(t) = A_e \sum_{l=1}^L H_{il} E_l. \quad (4.9)$$

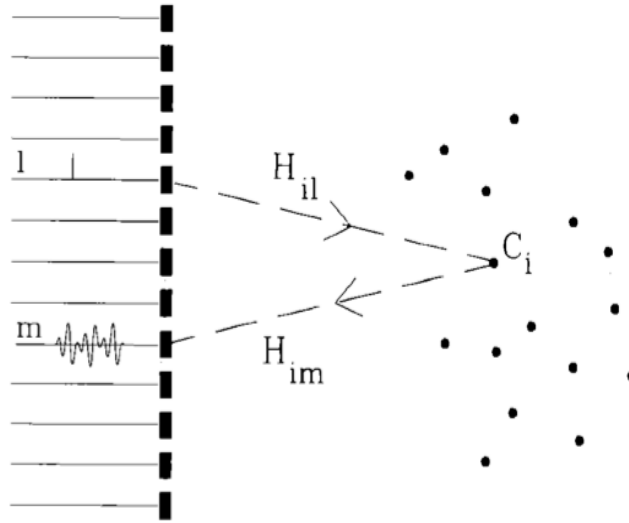


Figura 4.1: Target puntiformi, illustrazione delle notazioni.

L'espressione (4.9) è semplificata usando la notazione matriciale:

$$\mathbf{P} = A_e \mathbf{H} \mathbf{E}, \quad (4.10)$$

con \mathbf{E} che rappresenta il segnale di input, \mathbf{P} il vettore del campo ricevuto dai d scatterer ed \mathbf{H} una matrice di dimensione $L \times d$ detta di diffrazione.

In presenza di un singolo riflettore, l'onda acustica riflessa dallo scatterer i è $Q_i = C_i P_i$. I vettori \mathbf{P} e \mathbf{Q} sono collegati attraverso la matrice diagonale \mathbf{C} :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} \mathbf{P}, \quad (4.11)$$

dove $C_{ij} = \delta_{ij} C_i$ per tutti $i, j \in 1, \dots, d$.

In accordo con il principio di reciprocità, quando il target emette un segnale $\delta(t)$, il trasduttore l riceve il segnale h_{il} . Di conseguenza, la contropropagazione è la trasposta della matrice di propagazione \mathbf{H} in modo che il vettore della pressione riflessa dagli scatterer è legata al segnale di output \mathbf{R} dalla seguente relazione:

$$\mathbf{R} = A_r^t \mathbf{H} \mathbf{Q}. \quad (4.12)$$

La matrice di trasferimento sarà allora data da:

$$\mathbf{K} = A_e A_r^t \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}. \quad (4.13)$$

4.2 Decomposizione dell'operatore di time reversal

La diagonalizzazione dell'operatore di *time reversal* è eseguita analiticamente o quando i due scatterer sono ben risolti dal sistema oppure quando ve

ne sono solo due. Il modello matriciale ricavato finora è relativo all'ottica dell'array di trasduttori, che è indubbiamente il punto di vista considerato sperimentalmente.

4.2.1 Determinazione degli autovettori di $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$

Due riflettori sono detti idealmente separati quando è possibile focalizzarsi su uno di essi senza mandare energia sugli altri. Supponiamo che una sorgente puntiforme si trovi nella posizione del i -esimo riflettore ed emetta un Dirac $\delta(t)$. Allora, il segnale ricevuto sul sensore l è la convoluzione della risposta impulsiva h_{il} con la risposta acusto-elettrica in ricezione $a_r(t)$, ovvero $a_r(t) \otimes h_{il}(t)$. Il modo migliore per ottenere la convergenza delle onde sullo stesso riflettore è utilizzare come segnali di input quelli invertiti temporalmente (processo di filtraggio adattato) $a_r(-t) \otimes h_{il}(-t)$. Il segnale acustico ricevuto dallo scatterer j nel dominio della frequenza è:

$$P_j = A_r^* A_e \sum_{l=1}^L H_{jl} H_{il}^*. \quad (4.14)$$

Denotando con \mathbf{H}_i il vettore di componenti $[H_{i1}, H_{i2}, \dots, H_{iL}]$. L'equazione (4.14) può essere scritta come:

$$P_j = A_r^* A_e^t H_j H_i^*. \quad (4.15)$$

Se i target sono idealmente risolti, P_j è zero per $j \neq i$. In altre parole, i vettori \mathbf{H}_i sono ortogonali. Gli autovettori di $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ sono ricavabili a partire da quest'ultima equazione, come dimostrato in [9], e sono gli \mathbf{H}_i^* associati agli autovalori

$$\lambda_i = |C_i|^2 \left(\sum_{m=1}^L |H_{im}|^2 \right)^2. \quad (4.16)$$

Se gli autovalori non sono degeneri, ogni autovettore dell'operatore di *time reversal* corrisponde ad uno scatterer ed è il segnale vettore che potrebbe essere emesso, se fosse presente solo il target ad esso relativo. Come si nota dalla (4.16), l'autovalore dipende dalle caratteristiche del target e dagli effetti propagativi, può essere visto come il quadrato della riflettività apparente del target. In presenza di bersagli non risolti in ${}^t\mathbf{H}_j\mathbf{H}_i^*$ compaiono termini dovuti all'accoppiamento. Per livelli di accoppiamento significativi, non è più possibile ottenere il focusing selettivo impiegando gli autovettori.

4.3 Metodo D.O.R.T.

Il D.O.R.T. (acronimo francese di *Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel*) è una tecnica di rilevazione attiva che consente di individuare e separare le risposte di diversi scatteratori in mezzi omogenei o non omogenei anche in presenza di riverberazioni. Il metodo D.O.R.T. è deducibile dai precedenti risultati teorici e include un processamento matematico dei segnali misurati. Il procedimento è riassumibile in tre passi:

The first step consiste nella misura delle risposte impulsive inter-elemento.

Dal momento che la ricezione nel nostro sistema avviene in parallelo, questa misurazione richiede L operazioni di trasmissione e ricezione. Il primo trasduttore trasmette un segnale $e(t)$. I segnali ricevuti sugli L canali sono memorizzati. Questa operazione è ripetuta per tutti i trasduttori dell'array con lo stesso segnale trasmesso $e(t)$. I termini della matrice di trasferimento \mathbf{K} sono ottenuti dalla trasformata di Fourier

di ogni segnale. La misura potrebbe essere fatta anche con un sistema multiplato che effettui $L \times L$ operazioni di rice-trasmissione.

The second step è la diagonalizzazione dell'operatore di *time reversal* ad una fissata frequenza. La matrice, per effettuare tale operazione, deve essere simmetrica e questo non negli esperimenti. Infatti il principio di reciprocità non è soddisfatto esattamente per la presenza del rumore e per l'esistenza di differenze tra le risposte acusto-elettriche dei vari sensori dell'array. Così per ragioni numeriche, è conveniente rendere la matrice di trasferimento \mathbf{K} simmetrica sostituendo i suoi elementi K_{lm} , $1 \leq (l, m) \leq L$ con $\frac{1}{2}(K_{lm} + K_{ml})$. In molte simulazioni [11], si è trovato che il coefficiente di correlazione medio tra le risposte reciproche è più alto del 95%, per cui la simmetrizzazione arbitraria di \mathbf{K} non comporta errori significativi nel modello. L'operatore di *time reversal* $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ è dunque calcolato e diagonalizzato. La distribuzione dei suoi autovalori fornisce un'informazione interessante: nel caso di target puntiformi, il numero di autovalori significativi equivale al numero dei bersagli, se questi vengono risolti dal sistema. Più in generale, questo numero corrisponde a quello dei bersagli a riflettività maggiore.

The third step contropropagazione di ogni autovettore. Questa fase può essere eseguita sia numericamente che sperimentalmente. La contropropagazione in forma numerica è calcolata per mezzi omogenei e con array di geometria nota e fornisce immagini separate dei differenti target. La contropropagazione sperimentale invece, richiede l'utilizzo di generatori controllati in parallelo come nel caso del TRM. A partire dall'informazio-

ne monocromatica fornita dagli autovettori, vengono generati dei segnali impulsivi. Il risultato trovato permette di trasmettere onde focalizzate su uno dei target senza la necessità di conoscere la geometria dell'array di trasduttori o le proprietà del mezzo di propagazione.

Capitolo 5

Time reversal e MUSIC

5.1 Introduzione

Nel settore del rilevamento di sorgenti, sono state sviluppate sofisticate tecniche *array signal processing* in grado di stimare numero, direzione ed intensità dei segnali ricevuti. Metodi con proprietà di risoluzione molto elevata, come MUSIC, sono oggetto di intense attività di ricerca nell'ambito del processamento d'array passivo. Tuttavia numerose applicazioni che implicano la rilevazione e la localizzazione di scatteratori richiedono un'elaborazione come quella effettuata in array attivi (metodo D.O.R.T.). Di seguito si mostrerà un collegamento analitico fra il D.O.R.T. e i metodi sviluppati per la rilevazione passiva di sorgenti che sono basati sull'autodecomposizione della matrice di covarianza d'array. In pratica la tecnica del *time-reversal field processing* per fare il *remote sensing* attivo viene reinterpretata nell'ambito del processamento di segnale basato sui sottospazi.

Nel *time-reversal imaging* uno o più target sconosciuti (scatterers) vengono se-

quenzialmente sondati utilizzando un insieme di N antenne e i campi riflessi sono misurati in ogni punto dell'antenna dando luogo alla, già precedentemente citata, *multistatic matrix response* $K_{i,j}$ con i e j che variano da uno a N . La matrice K è successivamente impiegata per il calcolo della matrice Hermitiana di *time-reversal* $T = K^\dagger K$ i cui autovettori sono in corrispondenza con i differenti target. In particolare, il campo generato dall'array e relativo ad uno di questi autovettori ha valore massimo in corrispondenza del bersaglio associato quindi, se la funzione di Green del mezzo in cui si trovano i target (*background medium*) è nota, si può ricavare in modo semplice un'immagine sintetica della loro posizione.

Metodologie che sfruttano i sottospazi appartengono al processamento di segnale di tipo statistico e possono essere anche impiegate su array d'antenne per rivelare e individuare target. Tali metodi impiegano l'elaborazione della funzione di autocorrelazione e sebbene essi siano facilmente adattabili al caso di array attivi, presentano serie limitazioni in presenza di vari target coerenti o in caso di disponibilità limitata di campioni per dare una stima della matrice di covarianza. Applicando la scomposizione a valori singolari sulla matrice K o equivalentemente diagonalizzando T (matrice di *time-reversal*) è possibile ricavare autovettori che giocano lo stesso ruolo di quelli ottenuti dalla funzione di autocorrelazione nel MUSIC classico. Il presupposto per un processamento del genere è che la propagazione sia lineare e invariante allo *shift* temporale. L'utilizzo congiunto di MUSIC e *time-reversal* o coniugazione di fase in frequenza, dà luogo ad un approccio molto interessante per la stima della DOA che ha validità sia in mezzi omogenei che non. La proprietà chiave di K che permette l'utilizzo di tecniche di elaborazione *subspace-based* è che il suo rango(in

assenza di rumore) eguaglia il numero di scatteratori puntiformi presenti.

5.2 Formulazione matematica

La teoria è sviluppata interamente nel dominio della frequenza, in tal modo si applica equamente sia su elementi d'antenna a banda stretta che su quelli a banda larga. Di seguito si utilizzerà il termine generico “antenna” per includere sia elementi d'array acustici che elettromagnetici e non si farà distinzione fra questi due tipi di applicazioni. In frequenza, per segnali che nel tempo sono a valori reali, l'operazione di *time-reversal* diviene una coniugazione di fase e ciò è facilmente dimostrabile analizzando le loro trasformate di Fourier. Si consideri un'array di N antenne centrate nei punti di coordinate R_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Non si faranno assunzioni circa la loro posizione e soprattutto non è necessario che si trovino su un piano o che siano equispaziate. Ogni antenna irradia energia (sottoforma di un campo scalare $\psi_j(r, \omega)$) in un sottospazio $z \geq 0$ dove sono presenti L scatteratori in posizioni X_k , per $k = 1, 2, \dots, L$. Il campo radiato dal j -esimo elemento dell'antenna e il campo riflesso totale saranno:

$$\psi_j(\mathbf{r}, \omega) = G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) e_j(\omega) \quad (5.1)$$

$$\psi_j^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{k=1}^L G(\mathbf{r}, \mathbf{X}_k) \rho_k(\omega) G(\mathbf{X}_k, \mathbf{R}_j) e_j(\omega) \quad (5.2)$$

dove la sommatoria è effettuata su tutti i target e $\rho_k(\omega)$ è l'ampiezza dello scattering di un riflettore. Nelle precedenti equazioni $e_j(\omega)$ rappresenta la tensione applicata sui terminali del j -esimo elemento d'antenna, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la

funzione di Green in frequenza del mezzo in cui si trovano i target¹. Quando tutti gli elementi sono simultaneamente eccitati, essendo le tensioni e_j , $j = 1, 2, \dots, N$, il campo incidente totale e quello scatterato saranno dati da:

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{j=1}^N \psi_j = \sum_{j=1}^N G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_j) e_j(\omega) \quad (5.3)$$

$$\psi_j^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{j=1}^N \psi_j^{(s)} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L G(\mathbf{r}, \mathbf{X}_k) \rho_k(\omega) G(\mathbf{X}_k, \mathbf{R}_j) e_j(\omega). \quad (5.4)$$

Il voltaggio di output $v_l(\omega)$ relativo all' l -esima antenna si assume che sia uguale all'ampiezza del campo scatterato come misurato dall'elemento l -esimo stesso e sarà:

$$\begin{aligned} v_l(\omega) &= \sum_{j=1}^N \psi_j^{(s)}(\mathbf{R}_l, \omega) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L G(\mathbf{R}_l, \mathbf{X}_k) \rho_k(\omega) G(\mathbf{X}_k, \mathbf{R}_j) e_j(\omega). \end{aligned} \quad (5.5)$$

La (5.5) può essere riscritta in una notazione matriciale compatta introducendo $g_k(\omega)$ vettore colonna N dimensionale delle funzioni di Green

$$g_k(\omega) = \{G(\mathbf{R}_l, \mathbf{X}_k)\} = [G(\mathbf{R}_1, \mathbf{X}_k), G(\mathbf{R}_2, \mathbf{X}_k), \dots, G(\mathbf{R}_N, \mathbf{X}_k)]^T. \quad (5.6)$$

Impiegando questi vettori colonna viene definita la *multi-static response matrix* (matrice MSR) nota anche come matrice delle risposte in frequenza (FRM)

$$K = \{K_{i,j}\} = \sum_{k=1}^L G(\mathbf{R}_i, \mathbf{X}_k) \rho_k(\omega) G(\mathbf{X}_k, \mathbf{R}_j) = \sum_{k=1}^L \rho_k g_k g_k^T \quad (5.7)$$

anche nell'ultima parte dell'equazione precedente è stata trascurata la dipendenza dei coefficienti di riflessione (ρ_k), dei vettori delle funzioni Green e della

¹Per semplicità notazionale è stata trascurata la sua dipendenza dalla frequenza

stessa FRM dalla frequenza.

Le simulazioni saranno eseguite ipotizzando che il mezzo sia reciproco; in tale scenario la matrice K è simmetrica ($K_{i,j} = K_{j,i}$) nominalmente $K(\omega)^T = K(\omega)$ per ogni ω . La (5.7) è una funzione della geometria e della fisica del mezzo in cui si propaga l'onda tra gli elementi dell'antenna e gli scatterer. Questa funzione include gli effetti di:

- geometria dell'array
- geometria degli scatterer
- caratteristiche del mezzo (includendo non omogeneità)
- pattern di direttività degli elementi dell'antenna e degli scatterer.

Le funzioni di Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sono quindi completamente generali, in questo senso la formulazione descritta è applicabile sia a mezzi omogenei che non omogenei.

5.2.1 Analisi matrice di Time-reversal

La matrice di *time-reversal* T è definita:

$$T = K^\dagger K = K^* K \quad (5.8)$$

dove con l'apice \dagger si denota la matrice aggiunta. La seconda uguaglianza della (5.8) deriva dal fatto che la matrice delle risposte multi-statiche è simmetrica per cui $K^\dagger = K^*$ (in cui $*$ rappresenta il complesso coniugato). Il vincolo di reciprocità ($K_{i,j} = K_{j,i}$) nella pratica è forzato automaticamente usando la stessa

funzione di Green nel percorso trasmissivo e in quello di ricezione. In termini di vettori funzioni di Green inserendo la (5.7) nella (5.8) che:

$$\begin{aligned} T &= \left[\sum_{k=1}^L \rho_k g_k g_k^T \right]^* \left[\sum_{k'=1}^L \rho_{k'} g_{k'} g_{k'}^T \right] \\ &= \sum_{k=1}^L \sum_{k'=1}^L \Lambda_{k,k'} g_k^* g_{k'}^T \end{aligned} \quad (5.9)$$

con

$$\Lambda_{k,k'} = \rho_k^* \rho_{k'} \langle g_k g_{k'} \rangle \quad (5.10)$$

le parentesi angolari nella precedente hanno il significato di prodotto scalare in uno spazio C^N ad esempio:

$$\langle g_k, g_{k'} \rangle = g_k^\dagger g_{k'} = \sum_{n=1}^N g_k^*(n) g_{k'}(n).$$

Il rango della matrice di *time-reversal* è lo stesso della matrice K ciò ne consente l'utilizzo in congiunzione con tecniche di stima *subspace-based*. Poichè K è, per definizione, una somma lineare di matrici ottenute attraverso i prodotti esterni dei vettori funzioni di Green g_k , $k = 1, 2, \dots, L$, il suo rango sarà uguale al numero di tali vettori che sono linearmente indipendenti. Gli autovalori diversi da zero di questa matrice, se il numero delle antenne N è maggiore del numero dei target L , sono proprio L (rango pari a L). Nelle simulazioni successive si assume che i target siano ben risolti, la $\Lambda_{k,k'}$ avrà dunque una struttura diagonale, ossia è approssimativamente uguale a zero per $k \neq k'$. La matrice di *time-reversal* potrà essere semplificata dal momento che il prodotto scalare tra due differenti vettori di funzioni di Green è all'incirca uguale a zero.

$$\langle g_k, g_{k'} \rangle = \sum_{n=1}^N G^*(\mathbf{R}_n, \mathbf{X}_k) G(\mathbf{R}_n, \mathbf{X}_{k'}) \approx 0,$$

per $k \neq k'$. Dopo una serie di passaggi matematici ben descritti in [14] l'operatore di *time-reversal* assume la semplice forma

$$T = \sum_{k=1}^L |\rho_k|^2 g_k^* g_k^T. \quad (5.11)$$

e può essere interpretato come l'operatore proiezione sul sottospazio generato dai complessi coniugati dei vettori delle funzioni di Green g_k . I complessi coniugati dei vettori delle funzioni di Green comprendono M autovettori della matrice di *time-reversal* che ha dimensione N^2 e quindi possiede in totale N autovettori(ortogonali). Sotto l'assunzione che il numero dei target L sia minore del numero dei trasduttori dell'array, i rimanenti $N - L$ autovettori dovendo essere ortogonali ai vettori delle funzioni di Green avranno autovalori pari a zero

$$T\mu = \sum_{k=1}^L |\rho_k|^2 g_m^* \overbrace{g_m^T}^{\langle g_k^*, \mu \rangle} \mu = 0 \quad (5.12)$$

in cui μ è un autovettore nel complemento ortogonale dello spazio generato dai vettori delle funzioni di Green. Per semplificare l'analisi successiva ci si riferirà al sottospazio formato dai vettori delle funzioni di Green come *signal subspace* e al suo complemento ortogonale, generato da autovettori con autovalori prossimi a zero, come *noise subspace* questa è una nomenclatura affine a quella impiegata nel MUSIC standard.

Per cui

$$C^N = \mathcal{S} \oplus \mathcal{N} \quad (5.13)$$

dove $\mathcal{S} = \{span(g_k^*, k = 1, 2, \dots, L)\}$ è il sottospazio del segnale, \mathcal{N} quello del rumore e C^N è lo spazio N -dimensionale a valori complessi dei vettori colonna(lo spazio delle tensioni applicate agli array d'antenne a N elementi).

In generale il termine $\Lambda_{k,k'}$ non sarà una matrice diagonale e la matrice di *time-reversal* rimarrà nella sua forma generale:

$$T = \sum_{k=1}^L \sum_{k'=1}^L \Lambda_{k,k'} g_k^* g_{k'}^T. \quad (5.14)$$

La T continua ancora ad essere un operatore di proiezione nel sottospazio generato dai complessi coniugati dei vettori delle funzioni di Green g_k (sottospazio dei segnali \mathcal{S}). Gli autovalori della matrice saranno la sovrapposizione lineare dei g_k complessi coniugati. Tuttavia vale ancora la scomposizione di C^N in somma diretta dei sottospazi di segnale e rumore. Una proprietà fondamentale che continua a valere è che il rango di T e quindi la dimensione di \mathcal{S} sono uguali a L . Nel resto della tesi gli autovettori di T saranno scritti come μ_k , $k = 1, 2, \dots, L, L+1, \dots, N$ con i primi L che sono relativi agli autovalori diversi da zero mentre i rimanenti $N - L$ sono quelli che generano il sottospazio \mathcal{N} :

$$T\mu_k = \lambda_k \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, L,$$

$$T\mu_k = 0, \quad k = L+1, L+2, \dots, N,$$

$$\langle \mu_k, \mu_{k'} \rangle = \delta_{k,k'}.$$

5.3 Implementazione Time-reversal MUSIC array passivo

Il collegamento fra *time-reversal imaging* e MUSIC, essendo approcci elaborativi applicabili rispettivamente ad array attivi e passivi, non è così diretto. Come descritto accuratamente in [10], misurare le N colonne della matrice

$\mathbf{K}(\omega)$ equivale ad effettuare N misurazioni di un segnale sorgente nel rilevamento passivo. La matrice $\mathbf{T}(\omega) = \mathbf{K}(\omega)^\dagger \mathbf{K}(\omega)$ è interpretabile come una stima della matrice di covarianza utilizzata dal MUSIC standard. Applicare la SVD sulla matrice delle risposte inter-elemento ($\mathbf{K}(\omega)$) ad una fissata frequenza darà luogo al prodotto di tre matrici del tipo:

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{U}(\omega)\mathbf{\Sigma}(\omega)\mathbf{V}^\dagger(\omega)$$

tale che gli autovalori di $\mathbf{K}^\dagger(\omega)\mathbf{K}(\omega)$ sono i quadrati dei valori singolari di $\mathbf{K}(\omega)$ e i suoi autovettori sono le colonne di $\mathbf{V}(\omega)$. In altre parole i vettori singolari di $\mathbf{K}(\omega)$ sono invarianti al processo di *time-reversal* iterativo. Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice di covarianza corrisponde ad una SVD della matrice di trasferimento. La matrice dei coefficienti di riflessione al quadrato nella (5.11) che, per target ben risolti è diagonale, corrisponde alla matrice di covarianza dei segnali trasmessi \mathbf{S} che nella (2.5) è rappresentata per segnali ortogonali i cui elementi sono le potenze degli stessi.

La stima della direzione d'arrivo di un segnale avviene utilizzando i metodi che sfruttano le caratteristiche dei sottospazi. L'algoritmo di MUSIC può dunque essere impiegato insieme ad un processamento *time-reversal*. L'algoritmo di MUSIC sfrutta il fatto che la matrice di *time-reversal* è un operatore di proiezione nel sottospazio C^N , originato dai complessi coniugati dei vettori delle funzioni di Green (sottospazio del segnale), e che il sottospazio di rumore \mathcal{N} è generato dagli autovettori aventi autovalori nulli. Da ciò, segue che i complessi coniugati di ciascun vettore delle funzioni di Green sono normali al sottospazio rumore e, in particolare agli autovettori della matrice di *time-reversal*,

corrispondenti all'autovalore nullo;

$$\langle \mu_{k_0}, g_k^* \rangle = \langle \mu_{k_0}^*, g_k \rangle = 0 \quad (5.15)$$

per $k = 1, 2, \dots, L$, $k_0 = L + 1, \dots, N$, dove μ_{k_0} sono gli autovettori di T che hanno autovalore uguale a zero. Coerentemente con l'algoritmo, lo pseudo-spettro può essere formato nel modo seguente:

$$D(\mathbf{X}_p) = \frac{1}{\sum_{k_0=L+1}^N |\langle \mu_{k_0}, g_p \rangle|^2} \quad (5.16)$$

in cui μ_{k_0} è il k_0 -esimo autovettore di T che possiede autovalore nullo e

$$g_p(\omega) = \{G(\mathbf{R}_l, \mathbf{X}_p)\} = [G(\mathbf{R}_1, \mathbf{X}_p), G(\mathbf{R}_2, \mathbf{X}_p), \dots, G(\mathbf{R}_N, \mathbf{X}_p)]^T \quad (5.17)$$

è lo *steering vector* rappresentato nel MUSIC classico da una colonna della matrice di Vandermonde A . Il vettore di *steering* è un vettore delle funzioni di Green per un target o una sorgente in posizione \mathbf{X}_p . Poichè il sottospazio del segnale è ortogonale a quello del rumore il prodotto scalare $|\langle \mu_{k_0}, g_p \rangle|^2$, con $k_0 = L + 1, L + 2, \dots, N$, assumerà un valore prossimo a zero quando la posizione di test \mathbf{X}_p corrisponde alla posizione attuale di uno dei target \mathbf{X}_k e questo accade anche per bersagli non risolti. Osservando la (5.16) si nota che D avrà dei picchi (teoricamente infiniti) in ogni posizione dei target; ad esempio quando $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_k$, $k = 1, 2, \dots, L$. L'equazione (5.16) è praticamente il MUSIC in unione con il *time-reversal*.

Il denominatore dello pseudo-spettro è chiaramente il quadrato dell'ampiezza della proiezione del complesso coniugato del vettore di *steering* nel sottospazio di rumore. Per effettuare questa operazione di proiezione, si può utilizzare l'operatore di proiezione nel sottospazio del rumore

$$P_S = \sum_{k=1}^L \mu_k \mu_k^\dagger \quad (5.18)$$

o, equivalentemente, vederla come un operatore di proiezione nel sottospazio del segnale

$$P_{\mathcal{N}} = \sum_{k=L+1}^N \mu_k \mu_k^\dagger \quad (5.19)$$

Perciò si ha che

$$\sum_{k_0=L+1}^N |\langle \mu_{k_0}^*, g_p \rangle|^2 = \sum_{k_0=L+1}^N |\langle \mu_{k_0}, g_p^* \rangle|^2 = |P_{\mathcal{N}} g_p^*|^2 = |[I - P_{\mathcal{S}}] g_p^*|^2. \quad (5.20)$$

I due differenti metodi di valutazione dello pseudo-spettro presentano diverse implicazioni implementative. In particolare, per array di dimensione molto maggiore rispetto al numero dei target(sorgenti), il sottospazio del rumore sarà più grande di quello del segnale perciò usare l'operatore di proiezione nel sottospazio del segnale, riduce il numero di autovettori da calcolare. Se invece i target sono quasi pari agli elementi dell'array, il sottospazio del rumore avrà dimensione minima, risulterà dunque vantaggioso lavorare sull'operatore di proiezione in \mathcal{N} .

5.4 Simulazioni effettuate in MATLAB

La simulazione è stata effettuata in uno spazio bi-dimensionale in cui gli elementi d'antenna sono posizionati linearmente ed equispaziati. Si ipotizza che il mezzo sia omogeneo, lineare e reciproco e che i segnali trasmessi siano decorrelati. Le sorgenti e le antenne dell'array sono rappresentabili come punti in uno spazio a due dimensioni. La funzione di Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in R^2 è del tipo:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{X}) = \frac{-i}{4} H_0(k|\mathbf{R} - \mathbf{X}|) \sim -\sqrt{\frac{1}{8\pi k}} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{X}|}}{\sqrt{|\mathbf{R} - \mathbf{X}|}} \quad (5.21)$$

dove H_0 è la funzione di Hankel di ordine zero del primo tipo e $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda. L'approssimazione nella (5.21) è valida fintanto che la distanza fra la posizione dell'antenna \mathbf{R} e la posizione del target \mathbf{X} supera le tre lunghezze d'onda. I vettori delle funzioni di Green saranno, trascurando la non essenziale costante $-i/4$, pari a

$$g_k(\omega) = [H_0(k|\mathbf{R}_1, \mathbf{X}_k), H_0(k|\mathbf{R}_2, \mathbf{X}_k), \dots, H_0(k|\mathbf{R}_N, \mathbf{X}_k)]^T. \quad (5.22)$$

5.4.1 TR-MUSIC per segnali a banda stretta

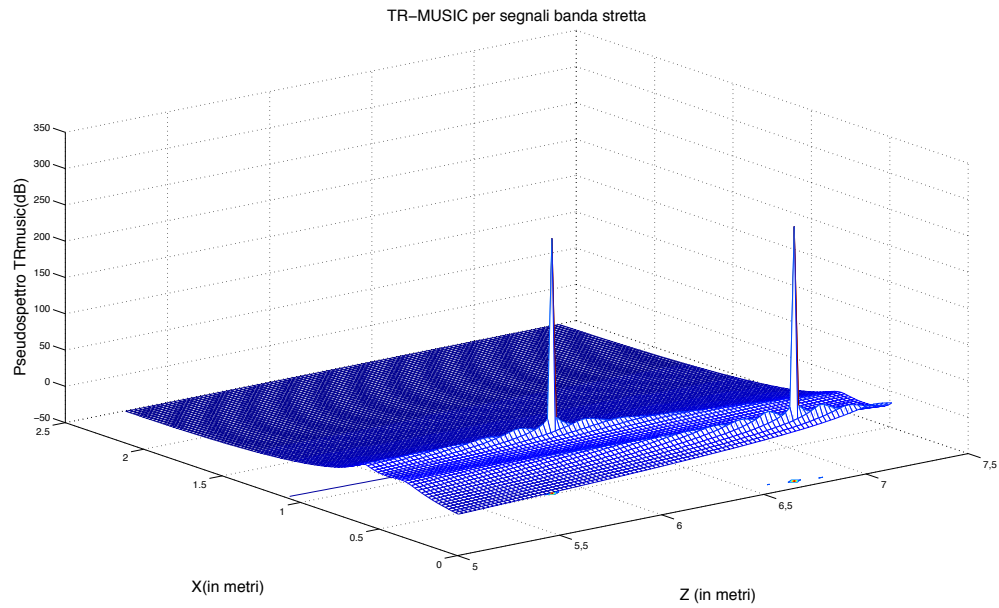


Figura 5.1: Porzione dello pseudospettro TR-MUSIC per segnali a banda stretta in assenza di rumore

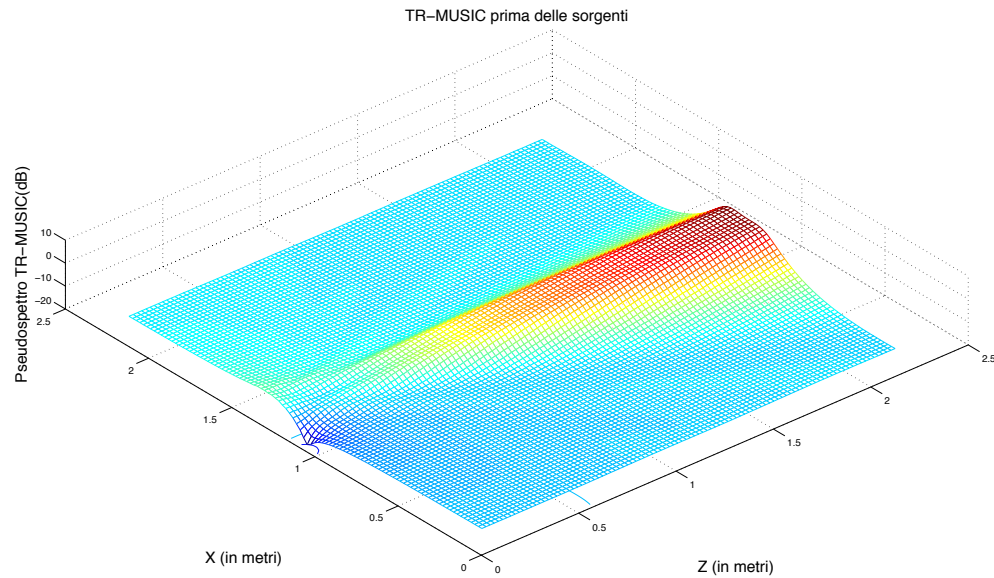


Figura 5.2: Porzione dello pseudospettro TR-MUSIC per segnali a banda stretta in assenza di rumore prima del punto in cui si trovano le sorgenti

Nella simulazione viene considerata una griglia rettangolare che costituisce una sezione del piano x, z . La griglia è ottenuta con incrementi $\delta x = \delta z$ pari ad un quarto di lunghezza d'onda ($\delta x = \lambda/4$) un'array lineare e uniforme costituito da nove elementi distanti $\lambda/2$ ($N = 9$) è posizionato su un singolo lato della griglia in $z = 0$ e $x = (50\lambda/4)$. Il vettore $g_k(\omega)$ è normalizzato rispetto al valore della funzione di Green sul primo elemento dell'array lineare. Sono presenti $L = 2$ sorgenti a frequenza 3.5 GHz , distanti rispettivamente 6.71 m e 5.85 m dall'asse di posizionamento dell'array. I segnali trasmessi sono scorrelati, con potenze pari a 0 dBW e giungono sul primo sensore da 81.65° e 84.57° ; per sorgenti a distanze dall'antenna non molto

elevate, la stima della DOA avviene specificando l'indice del sensore rispetto al quale valutarlo. E' normale che, allontanandosi dall'array, le direzioni di arrivo per una stessa sorgente tendono ad assumere lo stesso valore sui diversi elementi d'antenna. Per sorgenti a distanze ($|\mathbf{R} - \mathbf{X}|$) molto superiori rispetto alla spaziatura fra le antenne dell'array ($\Delta \sin(\theta)$), la funzione di Green (5.21) normalizzata ha la stessa struttura di un vettore colonna $a(\theta)$ che modella la risposta del sistema multiantenna ad un fronte d'onda ricevuto. In questo scenario applicando il *time-reversal* congiuntamente con il MUSIC e plottando lo pseudospettro (Figura 5.1), si nota facilmente che, in assenza di rumore sono presenti dei massimi proprio in corrispondenza delle posizioni in cui si trovano le sorgenti e ciò consente, nota la posizione dei ricevitori e servendosi di semplici calcoli trigonometrici, di stimare le DOA delle due sorgenti. Inoltre attraverso una serie di prove, si è evidenziato che le leggere fluttuazioni presenti in prossimità dei picchi possono essere fortemente limitate posizionando i vari elementi dell'array non su un singolo lato della griglia (x, z) ma su tutti e quattro. La Figura 5.1 rappresenta la porzione dello pseudospettro da 5 a 7.5 metri dall'array, prima di questa regione del piano non sono visibili picchi significativi.

5.4.2 TR-MUSIC su segnali UWB

Effettuando un filtraggio passabanda sul segnale UWB si realizza una decomposizione a banda stretta, in tal modo è possibile valutare la matrice FRM frequenza per frequenza. Il calcolo dello pseudospettro è migliorato effettuando

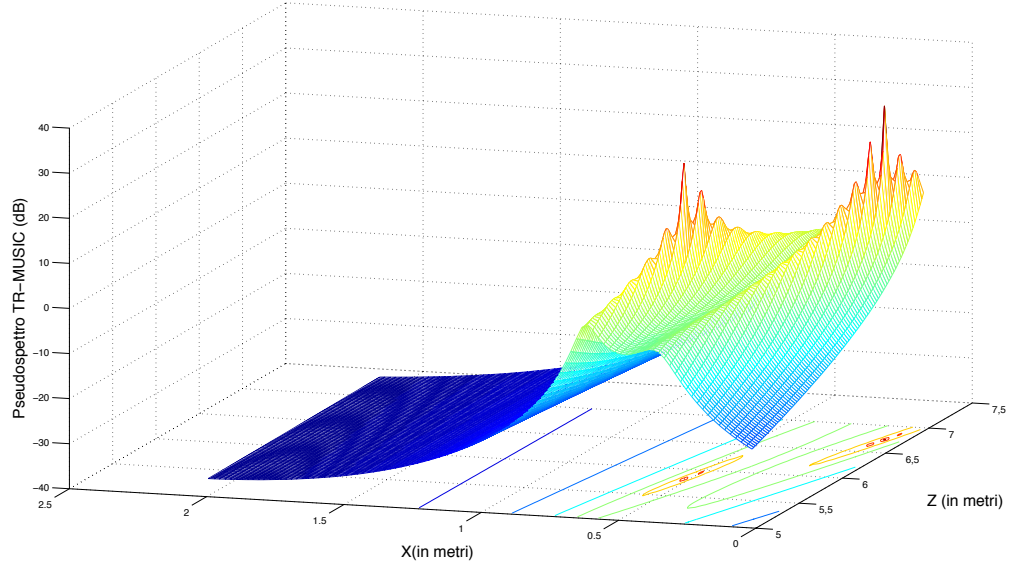


Figura 5.3: Porzione dello pseudospettro TR-MUSIC(a 5 metri dall'array) per segnali UWB in assenza di rumore

un'integrazione su tutte le frequenze a disposizione nel modo che segue:

$$P_{TRmusicUWB}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\int_{\omega \in \Omega} \|\Gamma^H(\mathbf{X}; \omega) \mathbf{U}_0(\omega)\|^2 d\omega} \quad (5.23)$$

dove $\Gamma^H(\mathbf{X}; \omega)$ è il vettore colonna delle funzioni di Green al variare della frequenza e $\mathbf{U}_0(\omega)$ è matrice $N \times N - L$ degli autovettori della matrice di *time-reversal* relativi agli autovalori nulli. Le frequenze considerate appartengono ad una banda di 500 MHz attorno ai 3.5 GHz. Per estrarre i diversi contributi a banda stretta si filtra il segnale ottenendo 500 sottobande da 1 MHz a questo punto si può lavorare su ciascuna di essa approssimandola con la sua frequenza centrale. I segnali trasmessi sono due PAM-DS-UWB [15](Fi-

gura 5.6(a) e 5.6(b)) generati servendosi di due codici di *Direct Sequence* ortogonali. Per le assunzioni fatte, la matrice dei coefficienti di riflessione al variare della frequenza o equivalentemente la \mathbf{S} in (2.5) contenente i contributi di potenza dei segnali per ogni singola frequenza considerata sono entrambe diagonali. Per estrarre le potenze dei due segnali UWB, sono state analizzate le loro PSD (*Power Spectral Density*) (Figura 5.7(a) e 5.7(b)) e ricavato il contributo di potenza su varie sottobande di dimensione 1 MHz fra 3.25 GHz e 3.749 GHz. Nel TR-MUSIC per segnali UWB, la SVD è effettuata su una serie di matrici $\mathbf{K}(\omega)$ ricavando autovalori e autovettori che corrispondono a porzioni differenti delle PSD dei due segnali. Essendo l'andamento delle densità spettrali di potenza approssimativamente di forma gaussiana, per le molteplici matrici FRM si otterranno autovalori significativi che sono più o meno elevati e questo si traduce immediatamente in variazioni nell'accuratezza delle stime. Tuttavia, l'integrazione al denominatore della (5.23), dà luogo ad una media sulle varie frequenze in gioco e ciò consente, come vedremo successivamente, di compensare eventuali malfunzionamenti dell'algoritmo in presenza di attenuazioni su particolari frequenze.

5.5 Comportamento in presenza di rumore e disturbi frequenziali

Uno dei risultati più interessanti nell'elaborazione TR-MUSIC su segnali UWB è legato alla capacità, rispetto a quelli a banda stretta, di far fronte ad attenuazioni su particolari frequenze. Nella simulazione si ipotizza che, la presenza

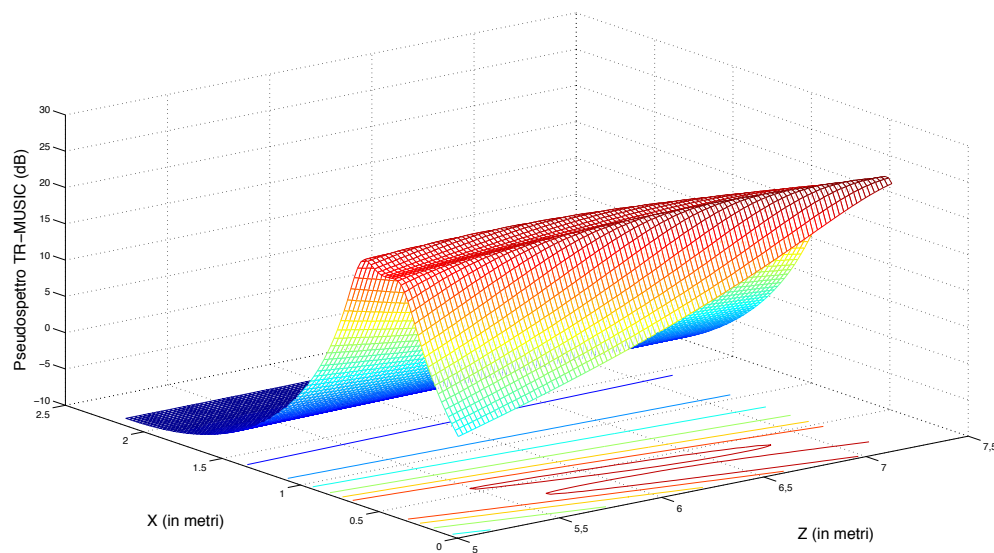


Figura 5.4: Porzione dello pseudospettro TR-MUSIC(5 metri dall'array) per segnali a banda stretta con rumore e filtro notch con banda 50 MHz intorno ai 3.5 GHz

di un filtro notch con banda 50 MHz attorno ai 3.5 GHz , causi un riduzione di 10 dB sul segnale ricevuto. In entrambi i casi prima di elaborare la matrice $\mathbf{K}(\omega)$ viene ad essa aggiunto un rumore gaussiano, bianco e di basso livello. Come si nota in Figura 5.5, lavorando su segnali UWB, sono ancora presenti due picchi approssimativamente nella posizione delle due sorgenti. Considerando la medesima geometria simulativa di 5.4 si manifesta un errore di stima della posizione medio di circa 1.5 cm che, comunque consente ancora di avere ottime stime della DOA. Di contro lavorando su singole frequenze(Figura 5.4) il calcolo dello pseudospettro non è più in grado di fornire la posizione delle

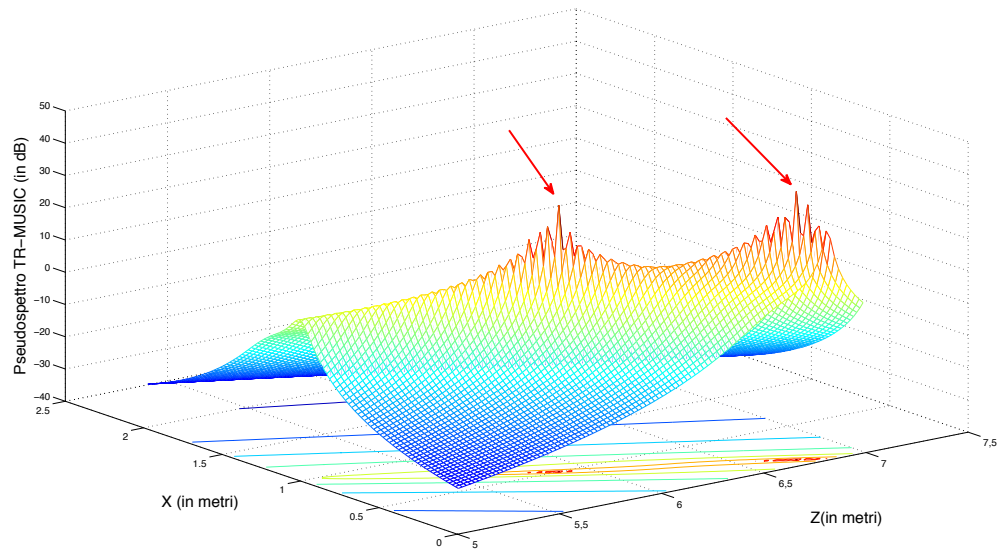
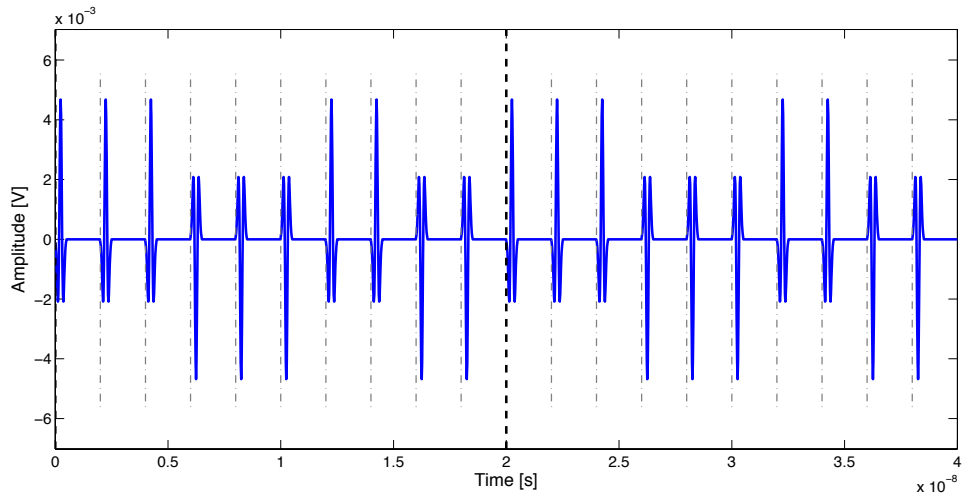
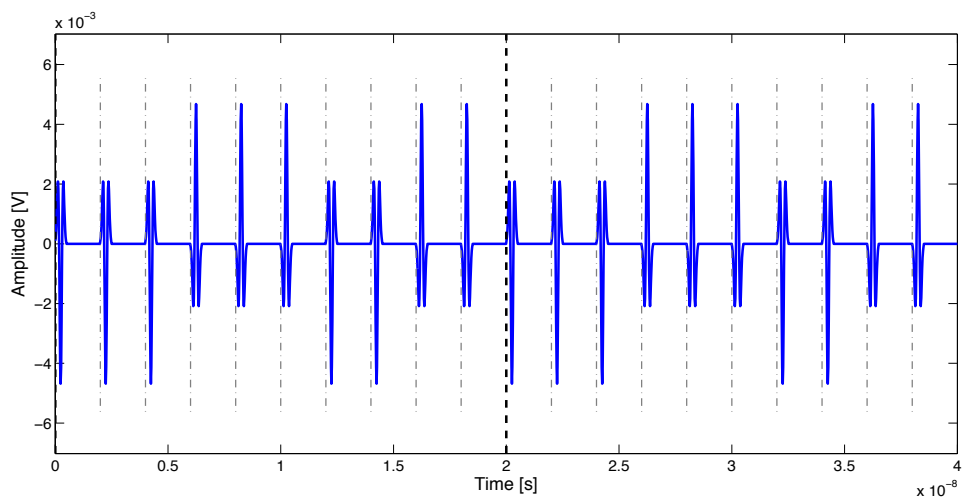


Figura 5.5: Porzione dello pseudospettro TR-MUSIC(a 5 metri dall'array) per segnali UWB con rumore e filtro notch con banda di 50 MHz intorno ai 3.5 GHz

sorgenti e conseguentemente delle loro DOA(assenza di picchi dominanti). Un leggero miglioramento nel caso di segnali a banda stretta si ha allontanando le due sorgenti; tuttavia con i livelli di attenuazioni suddetti si riesce solamente a evidenziare la presenza di due sorgenti ma non la loro esatta posizione.

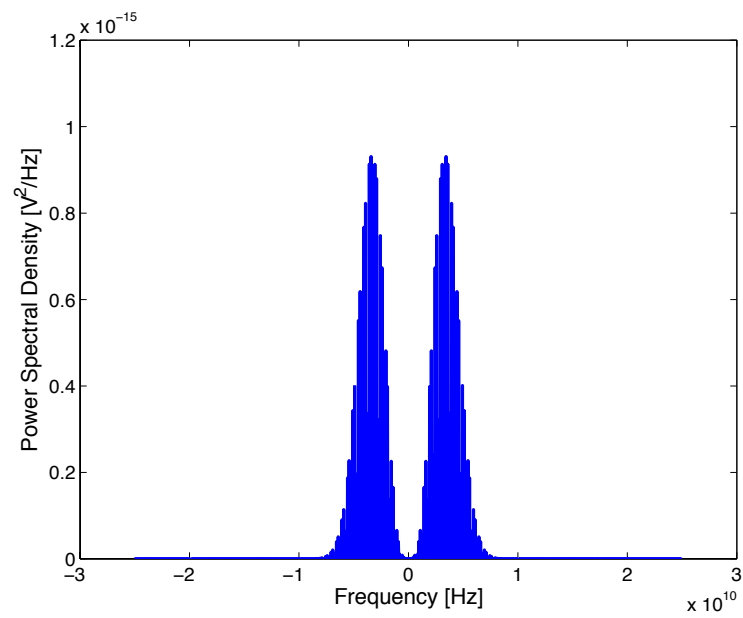


(a)

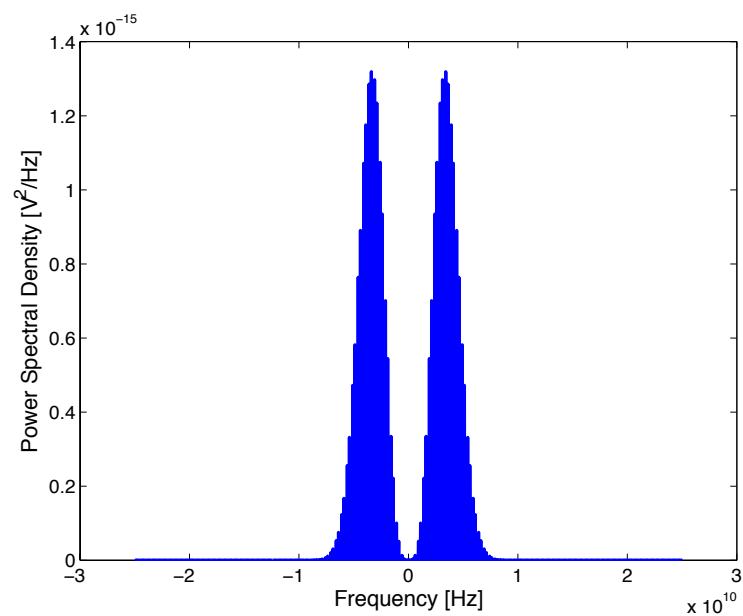


(b)

Figura 5.6: Segnali PAM-DS-UWB ortogonali



(a)



(b)

Figura 5.7: Spettri di densità di potenza dei due segnali UWB

Conclusioni

Esaminate singolarmente le tecniche del *time-reversal signal processing* e del MUSIC, con particolare attenzione alla stima della direzione d'arrivo dei segnali, è stata fornita una possibile implementazione che sia in grado di impiegare congiuntamente entrambi gli approcci elaborativi in presenza di array passivi. La teoria è stata sviluppata completamente nel dominio della frequenza. Questa metodologia elaborativa, dopo una modellizzazione dell'ambiente simulativo, è stata impiegata sia su segnali a banda stretta che all'UWB. L'applicazione del TR-MUSIC all'UWB ha evidenziato l'elevata robustezza, ottenibile in termini di stima della DOA anche quando sono presenti dei disturbi frequenziali.

La generalità del metodo da me estrapolato, ben si presta per futuri sviluppi che ne andranno ad analizzare il comportamento in scenari più complessi di quelli in cui sono state effettuate le simulazioni. In pratica, si potrà rivisitare l'algoritmo considerando ad esempio differenti geometrie degli array, segnali non completamente ortogonali oppure definire delle funzioni di Green che modellino mezzi più eterogenei. Il tutto nell'ottica di un futuro utilizzo in ambienti reali.

Bibliografia

- [1] A. Paulraj e T. Kailath : “*Direction of arrival estimation by eigenstructure methods with imperfect spatial coherence of wave fronts*”, Information Systems Laboratory, Stanford University. J. Acoustics, (1987).
- [2] M. Fink : “*Time reversed acoustics*”, Phys. Today **50**, 34-40 (1997).
- [3] M. Fink : “*Time reversal of ultrasonic fields-Part I: Basic principles*”, IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Contr. **39**(5), 555-566 (1992).
- [4] F. Wu, J-L. Thomas and M. Fink : “*Time reversal of ultrasonic fields-Part II: Experimental results*”, IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Contr. **39**(5), 567-578 (1992).
- [5] D. Cassereau and M. Fink : “*Time reversal of ultrasonic fields-Part III: Theory of the closed TR cavity*”, IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Contr. **39**(5), 579-592 (1992).
- [6] M. Fink, C. Prada, F. Wu and D. Cassereau : “*Self focusing with time reversal mirror in inhomogeneous media*”, in Proc. IEEE Ultrason. Symp. 1989, Montreal, PQ, Canada, vol. 2, pp. 681-686 (1989).

-
- [7] M. Fink, C. Prada and F. Wu : “*The iterative time reversal mirror: A solution to self focusing in pulse-echo mode*”, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 90, no. 2, pp 1119-1129 (1991).
- [8] R. O. Schmidt : “*Multiple emitter location and signal parameter estimation*”, IEEE Transaction on Antennas and Propagation, vol. AP-34, no. 3, pp 276-280 (1986).
- [9] C. Prada, J-Louis Thomas and M. Fink : “*The iterative time reversal process: Analysis of convergence*”, J. Acoustic. Soc. Amer., vol. 97, no. 1, pp 62-71 (1995).
- [10] C. Prada and Jean-Louis Thomas : “*Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of time reversal operator interpreted as covariance matrix*”, J. Acoustic. Soc. Amer., vol. 114, no. 1, pp 235-243 (2003).
- [11] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky and M. Fink : “*Decomposition of the time reversal operator: Detection and selective focusing on two scatterers*”, J. Acoustic. Soc. Amer., vol. 99, no. 4, pp 2067-2076 (1996).
- [12] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink : “*Time reversal of electromagnetic waves*”, Physical review letters Vol. 92, Num. 19 pp 193904-1/193904-3 (2004).
- [13] H. Lev-Ari and A.J. Devaney : “*The time-reversal technique re-interpreted: subspace-based signal processing for multi-static target location*”, IEEE pp 509-513 (2000).

-
- [14] A.J. Devaney : "*Super-resolution processing of multi-static data using Time-reversal and MUSIC*", submitted to the IEEE Transaction on Image Processing (1999).
- [15] M.G. Di Benedetto and G. Giancola : "*Understanding Ultra Wide Band Radio Fundamentals*", Pearson Education Inc.(2004).
- [16] F. K. Gruber, Edwin A. Marengo and A.J. Devaney : "*Time-reversal imaging with multiple signal classification considering multiple scattering between target*", J. Acoustic. Soc. Amer.,vol. 115, no. 6 pp 3042-3047 (2004).
- [17] M. Wax and T. Kailath : "*Detection of Signal by Information Theoretic Criteria* ", IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 33, no. 2 pp 387-392(1985).
- [18] A. Swindlehurst and T. Kailath : "*A performance analysis of Subspace-based Methods in Presence of Model Errors-Part I: The MUSIC algorithm*", Submitted to ASSP pp 1-42 (1990).
- [19] C. Dorme and M. Fink : "*Focusing in transmit-receive mode through inhomogeneous media: The Time Reversal matched filter approach*", J. Acoustic. Soc. Amer., vol. 98, no.2 pp 1155-1162 (1995).
- [20] M. Tanter, J. L. Thomas and M. Fink : "*Time Reversal and the inverse filter*", J. Acoustic. Soc. Am. pp 223-234 (2000).
- [21] B. E. Anderson, M. Griffa, C. Larmat, T. J. Ulrich and P. A. Johnson Acoustics Today vol. 4, issue 1, January 2008.

-
- [22] G. Montaldo, M. Tanter and M. Fink : “*Real time inverse filtering through iterative time reversal*”, J. Acoustic. Soc. Am., vol. 115, no. 2 pp 768-775 (2004).
- [23] P. Stoica and R. L. Moses : *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall Inc.(1997).
- [24] Y. S. Yoon, L. M. Kaplan and J. H. McClellan : “*Direction-of-arrival estimation of wideband source using arbitrary shaped multidimensional arrays*”IEEE, ICASSP (2004).
- [25] G. Su and M. Morf : “*The signal subsapce approach for multiple wide-band emitter location*”, IEEE Transactions on Acoustisc, Speech and Signal Processing vol. ASSP-31, no. 6 pp 1502-1522 (1983).

Elenco delle figure

1.1	Cylindrical beamforming(assenza di aberrazione).	6
1.2	Cylindrical beamforming(presenza di aberrazione).	7
1.3	Approccio a filtro adattato del TRM focusing (mezzo omogeneo)	12
1.4	Approccio a filtro adattato del TRM (mezzo non omogeneo) . .	13
1.5	Trasmissione e ricezione di un impulso	17
1.6	TR su un'onda elettromagnetica	18
2.1	Descrizione geometrica.	29
2.2	Implementazione MUSIC	31
2.3	Comportamento degli autovalori al variare dell'SNR	32
3.1	MUSIC con parziale coerenza	41
4.1	Target puntiformi, illustrazione delle notazioni.	53
5.1	Pseudospettro TR-MUSIC	70
5.2	Pseudospettro TR-MUSIC(prima parte)	71
5.3	Pseudospettro TR-MUSIC UWB	73
5.4	Pseudospettro TR-MUSIC con notch(<i>narrow band</i>)	75

5.5	Pseudospettro TR-MUSIC con notch(UWB)	76
5.6	Segnali PAM-DS-UWB ortogonali	77
5.7	Spettri di densità di potenza dei due segnali UWB	78